

KOCIOŁEK I CHOCHELKA: FORMUŁA SZACOWANIA ROZKŁADU MANDATÓW METODĄ JEFFERSONA-D'HONDTA¹

Jarosław Flis*
Uniwersytet Jagielloński

Wojciech Słomczyński**
Uniwersytet Jagielloński

Dariusz Stolicki***
Uniwersytet Jagielloński

Streszczenie: *Prezentujemy prostą, acz nową formułę szacowania rozkładu mandatów i odchylenia od proporcjonalności dla systemów wyborczych, w których alokacja mandatów odbywa się metodą Jeffersona-D'Hondta (JDH). Bazuje ona wyłącznie na ogólnokrajowych udziałach głosów i ustalonych parametrach danego systemu wyborczego. Zaproponowany przez nas wzór wyjaśnia odchylenie od proporcjonalności jako zjawisko zależne zarówno od liczby partii, jak i od liczby okręgów wyborczych. Pokazujemy, że zapewnia on dobre przybliżenie podziału mandatów, nawet w przypadku niewielkich naruszeń leżących u jego podstaw założeń. W tym celu przeprowadziliśmy testy empiryczne naszego wzoru na danych wyborczych z wszystkich dziewięciu krajów członkowskich Unii Europejskiej, w których podział mandatów w wyborach parlamentarnych odbywa się metodą Jeffersona-D'Hondta. Omawiamy zastosowania naszej formuły do modelowania*

¹ Tłumaczenie artykułu pt. „Pot and ladle: a formula for estimating the distribution of seats under the Jefferson-D'Hondt method”, opublikowanego w „Public Choice” (June 2019). Przekład artykułu został dokonany przez Darię Boratyn, Centrum Badań Ilościowych nad Polityką, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński.

* Jarosław Flis, Centrum Badań Ilościowych nad Polityką Uniwersytetu Jagiellońskiego, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Uniwersytet Jagielloński, ul. Łojasiewicza 4, 30-348 Kraków, e-mail: jaroslaw.flis@uj.edu.pl

** Wojciech Słomczyński, Centrum Badań Ilościowych nad Polityką Uniwersytetu Jagiellońskiego, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, e-mail: wojciech.slomczynski@im.uj.edu.pl

*** Dariusz Stolicki, Centrum Badań Ilościowych nad Polityką Uniwersytetu Jagiellońskiego, Wydział Studiów Międzynarodowych i Politycznych, Uniwersytet Jagielloński, ul. Jabłonowskich 5, 31-114 Kraków, e-mail: dariusz.stolicki@uj.edu.pl

efektów przesunięć głosów, konsolidacji i fragmentacji partii, tzw. *spoiler effects*, inżynierii wyborczej, progów ustawowych oraz gerrymanderingu. Ponieważ nie wymaga ona znajomości wyników wyborów na poziomie okręgów, umożliwia łatwiejsze prowadzenie symulacji wyborczych z wykorzystaniem metody JDH.

Słowa kluczowe: metoda Jeffersona-D'Hondta, zależność *seats-votes*, odchylenie od proporcjonalności, reprezentacja proporcjonalna.

POT AND LADLE: A FORMULA FOR ESTIMATING THE DISTRIBUTION OF SEATS UNDER THE JEFFERSON-D'HONDT METHOD

Abstract: We propose a simple yet new formula for estimating national seat shares and quantifying seat biases in elections employing the Jefferson-D'Hondt (JDH) method for seat allocation. It is based solely on the national vote shares and fixed parameters of the given electoral system. The proposed formula clarifies the relationship between seat bias on the one hand, and the number of parties and the number of districts on the other. We demonstrate that the formula provides a good estimate of seat allocations in real-life elections even in the case of minor violations of the underlying assumptions. With that aim in mind, we have tested it for all nine EU countries that employ the JDH method in parliamentary elections. Moreover, we discuss the applications of the formula for modeling the effects of vote swings, coalition formation and breakup, spoiler effects, electoral engineering, artificial thresholds and political gerrymandering. By not requiring district-level vote shares, our formula simplifies electoral simulations using the JDH method.

Key words: Jefferson-D'Hondt method, Seats-votes relationship, Seat bias, Proportional representation.

Metoda Jeffersona-D'Hondta jest jednym z najbardziej rozpowszechnionych sposobów podziału mandatów parlamentarnych pomiędzy listy partyjne w systemach wyborczych opartych na proporcjonalnej reprezentacji (Colomer, 2004; Bormann i Golder, 2013; Carey, 2017)². Pierwotnie opracowana w 1792 roku przez Thomasa

² Autorzy zajmujący się metodami podziału dóbr określają czasami metodę Jeffersona-D'Hondta mianem *metody największych dzielników* (Huntington, 1921, 1928, 1931), *metody najwyższych średnich* (Carstairs 1980: 17-19) lub *metody frakcji odrzuconych* (Chafee, 1929). W Szwajcarii jest ona znana pod nazwą *metody Hagenbacha-Bischoffa* (Szpiro, 2010: 204), na cześć szwajcarskiego fizyka Eduarda Hagenbacha-Bischoffa, który opracował i spopularyzował alternatywną, ale równoważną metodę (1888, 1905), zaś w Izraelu jako *system Badera-Ofera*, dla upamiętnienia dwóch członków Knesetu, którzy zaproponowali go w 1975 r.: Yohanana Badera, wybitnego absolwenta Alma Mater autorów niniejszego artykułu, oraz Avrahama Oferu.

Jeffersona w celu podziału miejsc w Izbie Reprezentantów Stanów Zjednoczonych między poszczególne stany (Jefferson, 1792)³, metoda ta została ponownie odkryta przez belgijskiego matematyka i prawnika Victora D'Hondta (D'Hondt, 1882, 1885) w celu dzielenia mandatów w wyborach parlamentarnych. Pytanie, czy D'Hondt znał pracę Jeffersona, pozostaje otwarte⁴. Metoda Jeffersona-D'Hondta jest wykorzystywana do podziału wszystkich lub prawie wszystkich mandatów parlamentarnych w Turcji, Hiszpanii, Argentynie, Polsce, Peru, Chile, Holandii, Belgii, Czechach, Izraelu, Szwajcarii, Paragwaju, Serbii, Finlandii, Chorwacji, Albanii, Macedonii, Timorze Wschodnim, Fidzi, Czarnogórze, Luksemburgu, Surinamie, Republice Zielonego Przylądka, na Wyspach Świętego Tomasza i Książęcej, Arubie i Grenlandii⁵. Jest również stosowana jako element systemu mieszanego lub wykorzystuje się ją na jednym z poziomów w ramach wielopoziomowych procedur alokacji mandatów w Japonii, Austrii, Danii, Islandii, Republice Dominikany oraz na Wyspach Owczych. Ponadto, w większości państw członkowskich Unii Europejskiej używa się jej do podziału miejsc w wyborach do Parlamentu Europejskiego (Poptcheva, 2016).

Odchylenie metody Jeffersona-D'Hondta od proporcjonalności (ang. *bias*) na korzyść większych partii jest dobrze znane (zob. np. Humphreys, 1911; Huntington, 1921, 1928, 1931; Morse, Von Neumann i Eisenhower, 1948; Rae, 1967; Taagepera i Laakso, 1980; Lijphart, 1990; Benoit, 2000; Balinski i Young, 2001; Marshall, Olkin i Pukelsheim, 2002; Pukelsheim, 2014, 2017). Szacowaniem wielkości tego odchylenia zajmowali się między innymi Sainte-Laguë (1910), Pólya (1918a, 1918b, 1919a, 1919b), Schuster i inni (2003), Drton i Schwingenschlögl (2005), Pukelsheim (2014) oraz Janson (2014). Jednakże wcześniejsze badania koncentrowały się na przypadku pojedynczego okręgu wyborczego, podczas gdy w większości krajów, w których stosowana jest metoda Jeffersona-D'Hondta, mamy do czynienia z wieloma okręgami wyborczymi, a mandaty przyznawane są w każdym z nich oddzielnie. W tych państwach polityczne skutki korzyści, jakie rzeczona metoda zapewnia większym komitetom wyborczym, mogą być szacowane wyłącznie w skali ogólnokrajowej⁶.

³ Równoważność propozycji Jeffersona i D'Hondta została zauważona przez Jamesa (1897: 36), ale o ile nam wiadomo, Baliński i Young (1978a) są pierwszymi współczesnymi autorami, którzy rozpoznali ten fakt.

⁴ Inni autorzy, którzy niezależnie odkryli metodę Jeffersona przed D'Hondtem, zob. Mora (2013: 6) nie używali szerszej rozpoznawalności. Geneza ponownego odkrycia dokonanego przez D'Hondta i rozpowszechnienie się jego pomysłu na polu zastosowań są omówione szczegółowo w pracy Dančičin (2013).

⁵ Kraje uporządkowano malejąco względem populacji.

⁶ Pukelsheim (2017: 133) zauważył, że odchylenie liczby mandatów zależy od liczby okręgów wyborczych, ale nie sformułował bezpośrednio wzoru sumacyjnego, skupiając się przede wszystkim na oczekiwanej wartości odchylenia liczby mandatów dla k -tej największej partii, a nie na wyrażeniu go w postaci zależności od odsetka głosów otrzymanych przez tę partię. O ile nie przyjmie się, że rozkład odsetków głosów otrzymanych przez komitety jest wystarczająco skoncentrowany na sympleksie probabilistycznym, tak aby ich kolejność była taka sama w każdym okręgu wyborczym (które to założenie nie ma uzasadnienia empirycznego), w wyniku zsumowania wartości oczekiwanych tych odchyleń w poszczególnych okręgach nie otrzymamy wartości odchylenia w skali kraju.

Do uzyskania ogólnokrajowego podziału mandatów metodą Jeffersona-D'Hondta niezbędna jest znajomość liczby głosów oddanych na każdy komitet we wszystkich okręgach, a zatem metoda ta nie może być stosowana, jeżeli wyniki na poziomie okręgów nie są dostępne. Tak dzieje się w przypadku wyników ogólnokrajowych sondaży przedwyborczych. Nie można też jej stosować, jeśli dane takie nie istnieją, jak w przypadku sytuacji kontrfaktycznych. W niniejszym artykule proponujemy nowy wzór umożliwiający szacowanie liczby mandatów wyłącznie na podstawie wyników ogólnokrajowych oraz dwóch ustalonych parametrów: wielkości wybieranego zgromadzenia i liczby okręgów wyborczych. Przewidywana liczba mandatów przypadających i -tej partii (s_i) dana jest następującym wzorem, określanym dalej jako „kociołek i chochelka”:

$$s_i = p_i \cdot s + p_i \cdot \frac{cn}{2} - \frac{c}{2}, \quad (0.1)$$

gdzie p_i jest odsetkiem głosów otrzymanych przez tę partię (znormalizowanym po usunięciu nieznaczących ugrupowań), s – liczbą wszystkich mandatów, c – liczbą okręgów wyborczych, zaś n – liczbą partii „znaczących” (zob. podrozdział 1.2.; należy zauważyć, że liczba ta jest funkcją wektora krajowych udziałów głosów, nie zaś niezależnym parametrem). Wzór daje dokładne rezultaty, o ile trzy podstawowe założenia, które przedyskutujemy szerzej w podrozdziale 1.2., są w pełni spełnione, natomiast gdy są spełnione jedynie w przybliżeniu, jak zazwyczaj ma to miejsce w rzeczywistych wyborach, stanowi dobrą aproksymację.

Powyższą formułę możemy przybliżyć stosując analogię do przyjęcia składkowego, na które wszystkie znaczące partie przychodzą z ilością prowiantu proporcjonalną do swojego udziału głosów, $p_i s$. Każdy komitet oddaje z niego do *wspólnego kociołka* identyczny wkład ($c/2$, czyli pół mandatu na każdy okręg wyborczy). Następnie zawartość kociołka jest dzielona pomiędzy uczestników przyjęcia proporcjonalnie do wielkości *chochelki* każdego komitetu, tj. jego znormalizowanego odsetka głosów (p_i)⁷. Taki podział jest niekorzystny dla małych partii, które wkładają do kociołka więcej niż z niego otrzymują, podczas gdy duże partie dostają bonusowe dokładki. Ze wzoru jasno wynika, że ich rozmiar zależy nie tylko od pojemności chochelek, ale także od wielkości całego kociołka ($cn/2$). Ujawnia to jedną z elementarnych własności metody Jeffersona-D'Hondta: wytwarzany przez nią bonus jest funkcją zarówno liczby okręgów wyborczych, jak i liczby partii.

Ilustrujemy działanie prezentowanego wzoru na przykładzie wyników wyborów parlamentarnych w Polsce w 2015 roku, pokazując jak otrzymany bonus pomógł zwycięskiej partii w uzyskaniu większości:

7 Dla podobnej heurystyki w przypadku $c = 1$ zob. Janson (2014: Remark 3.9).

Tabela 1

Formuła „kociołka i chochelki” zastosowana do wyborów parlamentarnych w Polsce w 2015 r.

partia	p_i	$-c/2$	$p_i(cn/2)$	s_i	liczba mandatów
PiS	207,29	-20,5	46,29	233,08	235
PO	132,88	-20,5	29,67	142,06	138
K'15	48,60	-20,5	10,85	38,95	42
N	41,93	-20,5	9,36	30,79	28
PSL	28,30	-20,5	6,32	14,12	16

Naukowcy zajmujący się systemami wyborczymi tradycyjnie posługują się raczej nie liczbą, ale *odsetkiem mandatów* ($q_i := s_i/s$), jako wygodniejszym z perspektywy badań porównawczych. Wzór na *odsetek mandatów*, otrzymany przez przekształcenie powyższego wzoru „kociołka i chochelki”, w bardziej przejrzysty sposób można wyrazić posługując się średnią wielkością okręgu wyborczego ($m := s/c$):

$$q_i = \left(1 + \frac{n}{2m}\right)p_i - \frac{1}{2m}. \quad (0.2)^8$$

Różnica pomiędzy odsetkami mandatów i głosów to *odchylenie od proporcjonalności* na korzyść i -tej partii ($\Delta_i := q_i - p_i$), dane następującym wzorem:

$$\Delta_i = \frac{n}{2m} \left(p_i - \frac{1}{n}\right). \quad (0.3)$$

Ponieważ znak odchylenia jest znakiem różnicy pomiędzy odsetkiem głosów uzyskanych przez komitet a średnim odsetkiem głosów, jest oczywiste, że to, czy partie zyskują, czy tracą w metodzie Jeffersona-D’Hondta zależy od tego, czy ich udziały głosów są powyżej, czy poniżej średniej. Metoda ta jest neutralna (tj. $\Delta_i = 0$) tylko w stosunku do tych partii, dla których $p_i = 1/n$.

Matematyczny kontekst naszego wzoru został omówiony w osobnej pracy (Flis i in., 2019). Poniższy artykuł poświęcony jest natomiast jego empirycznej dokładności i zastosowaniom. Pierwszym z nich jest predykcja. Do zastosowania metody Jeffersona-D’Hondta niezbędna jest znajomość wyników wyborów na poziomie okręgów wyborczych, a ponieważ wszystkie metody dzielnikowe mogą być wrażliwe na niewielkie różnice w liczbie głosów, wyniki te muszą być precyzyjne. Z kolei zaproponowana przez nas formuła umożliwia zaskakująco dokładne przewidywanie ogólnokrajowego rozkładu mandatów pomiędzy komitety (z dokładnością do 1,5% całkowitej liczby mandatów dla ponad 94,0% partii dla analizowanych danych z dziewięciu krajów), wymagając przy tym jedynie znajomości globalnych odsetków głosów uzyskanych przez partie. Może być zatem wykorzystywana do precyzyjnego modelowania podzia-

⁸ Inną alternatywną wersję wzoru (0.2) stanowi wzór (1.2).

łu mandatów na podstawie sondaży, *exit polls* i wstępnych wyników wyborów, gdzie znane są tylko ogólnokrajowe odsetki głosów⁹.

Po drugie, ponieważ wzór „kociołka i chochelki” nie zależy od dokładnych odsetków głosów pozostałych partii, może być stosowany do modelowania efektów przesunięć głosów, strategii politycznych (np. konsolidacji lub fragmentacji partii) i inżynierii wyborczej (takiej jak zmiany liczb okręgów lub wprowadzanie progów ustawowych) dla konkretnych lub hipotetycznych komitetów, bez angażowania skomplikowanych modeli rozkładu preferencji wyborczych.

Po trzecie, wzór dostarcza funkcyjnej formy zależności pomiędzy mandatami a głosami, tym samym wyrażając wielkość odchylenia od proporcjonalności przy pomocy następujących dwóch zmiennych: liczby partii znaczących i wielkości okręgów wyborczych. Zależności tej nie można łatwo dostrzec, gdy algorytm Jeffersona-D’Hondta jest podany w jego oryginalnej formie. Chociaż empiryczny związek pomiędzy odchyleniem od proporcjonalności a wielkością okręgów wyborczych był znany wcześniej, ten artykuł wskazuje teoretyczną podstawę dla jego istnienia.

Po czwarte, nasz model może również być wykorzystany do wykrywania gerrymanderingu w systemach wyborczych, w których stosowana jest metoda Jeffersona-D’Hondta. Co istotne, uogólnia on i rozszerza metodę *analizy różnicy efektywności wykorzystania głosów* (ang. *efficiency gap test*) McGhee-Stephanopoulosa (McGhee, 2014; Stephanopoulos i McGhee, 2015), będącą obecnie jedną z najpopularniejszych metod wykrywania tego zjawiska w dwupartyjnych systemach FPTP. Rozszerzenie to dotyczy trzech aspektów: pozwala na złagodzenie restrykcyjnego założenia równej frekwencji we wszystkich okręgach wyborczych oraz umożliwia rozszerzenie testu zarówno na systemy wielopartyjne, jak i systemy z wielomandatowymi okręgami wyborczymi.

W rozdziale 1 niniejszego artykułu omawiamy podstawowe własności i założenia proponowanej formuły, zaznaczając jednocześnie jej miejsce w istniejącej literaturze przedmiotu. Rozdział drugi, poświęcony analizie rzeczywistych danych wyborczych z dziewięciu europejskich krajów, pokazuje, że proponowany przez nas wzór zapewnia w miarę dokładne przybliżenie faktycznego podziału mandatów i jest dość odporny na niewielkie naruszenia założeń. Rozdział trzeci zawiera dyskusję na temat możliwości zastosowania wzoru do analizy koalicji wyborczych, tzw. *spoiler effects* i inżynierii wyborczej. Z kolei w rozdziale czwartym krótko omawiamy przyszłe kierunki badań, takie jak zastosowanie formuły do wykrywania gerrymanderingu i potencjalne poprawki do wzoru.

⁹ Dla uprzednich prób oszacowania podziału miejsc na podstawie ogólnokrajowych badań opinii publicznej zob. np. Pavia i García-Cárceles (2016) oraz Udina i Delicado (2005). Wcześniejsze prace zawierają próby dopasowania modelu statystycznego do danych empirycznych (zadanie w dużej mierze zależne od jawnych i ukrytych założeń o rozkładzie), my natomiast wyprowadzamy model teoretyczny bezpośrednio z metody Jeffersona-D’Hondta, wykorzystując dane empiryczne wyłącznie do celów testowych.

1. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI I ZAŁOŻENIA

1.1. Przegląd metody Jeffersona-D'Hondta i literatury poświęconej odchyleniu od proporcjonalności

Powszechnie stosowane są dwa algorytmy podziału miejsc metodą Jeffersona-D'Hondta. Pierwszy z nich, sformułowany przez Victora D'Hondta w 1882 roku, jest bliski oryginalnemu sposobowi podziału mandatów w Izbie Reprezentantów Stanów Zjednoczonych pomiędzy stany zaproponowanemu przez Thomasa Jeffersona w 1792 roku (Jefferson, 1792). Polega on na znalezieniu *dzielnika* D o tej własności, że jeżeli każdy komitet (lub stan) otrzymałby liczbę mandatów równą liczbie zdobytych przez niego głosów (lub jego populacji) podzielonej przez D , po zaokrągleniu tego ilorazu w dół do najbliższej liczby całkowitej, to żadne miejsca nie pozostałyby nieprzydzielone. Część mandatu odrzucana podczas zaokrąglania jest nazywana *resztą*. Łatwo pokazać, że liczba dzielników o powyższej własności jest prawie zawsze nieskończona¹⁰ i wszystkie one generują ten sam rozkład mandatów. W przypadku odsetka, nie zaś liczby głosów dogodniej jest posługiwać się mnożnikiem $L := v/D$, gdzie v jest liczbą wszystkich oddanych głosów.

Alternatywne sformułowanie metody Jeffersona-D'Hondta również zostało zaproponowane przez D'Hondta (1885) i jest zdecydowanie bardziej popularne wśród ustawodawców i politologów¹¹. Niech s będzie liczbą mandatów przypadających na dany okręg wyborczy i niech v_i będzie liczbą głosów oddanych na i -tą partię ($i = 1, \dots, n$) w tym okręgu. Definiujemy k -ty iloraz dla i -tej partii jako v_i/k , gdzie $k = 1, 2, \dots$. Niech q_s będzie s -tym największym spośród ilorazów dla wszystkich partii. Liczba mandatów s_i przydzielona i -temu komitetowi jest wtedy zdefiniowana jako liczba tych ilorazów dla i -tej partii, które są nie mniejsze niż q_s (jeżeli $q_{s+1} = q_s$, mamy do czynienia z remisem wyborczym). Równoważność obu sformułowań metody jest faktem powszechnie znanym (dla dowodu zob. np. Equer, 1911).

Wzory analityczne opisujące zależność pomiędzy odchyleniem od proporcjonalności w okręgach jednomandatowych a odsetkiem głosów uzyskanych przez partie zostały opracowane niezależnie przez Bochslera (2010), Jansona (2014) i Pukelsheima (2014, 2017). Choć wydają się identyczne i odpowiadają podanemu przez nas wzorowi (0.3) dla $c = 1$, odnoszą się do innych problemów i wykorzystują różne zestawy założeń. Rezultaty otrzymane przez Pukelsheima i Jansona są asymptotyczne, gwarantując poprawne wyniki wyłącznie w przypadku wielkości okręgów zmierzającej

¹⁰ Zbiór szczególnych przypadków, które sprowadzają się do remisu wyborczego (ponieważ wtedy do przyznania ostatniego mandatu lub mandatów musi zostać zastosowana jakaś dodatkowa reguła), jest miary zero.

¹¹ Przykładowo, wszystkie kraje członkowskie Unii Europejskiej oprócz Luksemburga stosujące metodę Jeffersona-D'Hondta w wyborach parlamentarnych używają w swoim ustawodawstwie wyborczym tego sformułowania algorytmicznego.

do nieskończoności. Bochslers z kolei przyjmuje jednostajny rozkład reszt zaokrąglonych na $(0,1)$, co w ogólnym przypadku zachodzi jedynie asymptotycznie. Takie założenia stanowią znaczne ograniczenia ze względu na fakt, że w rzeczywistości okręgi są nie tylko skończone, ale również dość małe (liczba mandatów do podziału w okręgu wynosi zazwyczaj pomiędzy 3 a 15). Nasz wzór natomiast opiera się na uśrednianiu po okręgach, a średnie są zbieżne do granicy jak $(\sqrt{cm})^{-1}$ (Flis i in., 2019).

1.2. Założenia

Jest możliwe do udowodnienia, że zaproponowane przez nas wzory podziału i odsetka mandatów dają dokładne wyniki pod trzema założeniami, które nieformalnie omówimy w niniejszym podrozdziale. Jeżeli te założenia nie zostaną spełnione, wystąpią błędy. Ponieważ jednak błędy wynikające z naruszenia poszczególnych założeń mają tendencję do wzajemnego znoszenia się, formuła pozostaje odporna na drobne ich naruszenia w sensie zapewnienia w przybliżeniu poprawnych wyników.

Łatwo zauważyć, że wzór „kociołka i chochelki” nie może być zastosowany dla dowolnej partii, ponieważ dla wystarczająco małych komitetów otrzymana liczba mandatów byłaby ujemna. Pokazuje to istnienie progu, poniżej którego wszystkie partie uzyskują zero mandatów, co jest wnioskiem zgodnym z wynikami wcześniejszych prac na temat istnienia naturalnego progu, zob. D’Hondt (1883), Rokkan (1968), Rae, Hanby i Loosemore (1971), Lijphart i Gibberd (1977) oraz Palomares i Ramírez (2003). Tylko te partie, których liczba głosów przekracza zarówno próg naturalny, jak i wszelkie obowiązujące progi ustawowe, są przez nas uważane za *znaczące*. Przekształcając wzór (0.1), otrzymujemy przybliżoną wysokość *progu naturalnego*:

$$t_n := \frac{1}{2m + n}. \quad (1.1)$$

Nasze oszacowanie progu naturalnego zależy od liczby partii znaczących, których liczba zależy z kolei od progu. Tej cyklicznej zależności można uniknąć, wyznaczając liczbę znaczących partii przy pomocy następującego algorytmu iteracyjnego. Wszystkie komitety porządkujemy malejąco zgodnie z ich oryginalnymi (nieznormalizowanymi) odsetkami głosów. Następnie, począwszy od największej partii ($n = 1$), dodajemy kolejne, jak długo warunek $p_n > t$ będzie spełniony dla n -tej partii¹². Warto zauważyć, że w każdym kroku p_n jest stosunkiem głosów oddanych na n -ty komitet do głosów oddanych na n największych¹³.

¹² Pełny dowód, że powyższy algorytm poprawnie identyfikuje wszystkie partie znaczące można znaleźć w pracy Flis i in. (2019: Sec. 7).

¹³ Stąd pierwsza partia zawsze jest znacząca (ponieważ p_1 wynosi 1 w pierwszym kroku algorytmu).

Rozważmy na przykład portugalskie wybory parlamentarne z 2015 roku. Przydzielono wówczas 230 mandatów w 22 okręgach wyborczych (co daje przybliżoną średnią wielkość okręgu $m \approx 10,45$). W pierwszym kroku algorytmu zbiór partii znaczących składa się tylko z największej partii, PàF. Następnie kontynuujemy dodawanie komitetów, jak pokazano w Tabeli 2 poniżej:

Tabela 2

Identyfikacja partii znaczących w wyborach parlamentarnych w Portugalii w 2015 r.

partia		stała	PàF	PS	BE	PCP-PEV	PAN
liczba głosów	próg (t)	normalizacji	2 074 345	1 747 730	550 945	445 901	75 170
krok (n)		$p_1 + \dots + p_n$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	4,56%	2 074 345	100,00%				
2	4,37%	3 822 075	54,27%	45,73%			
3	4,18%	4 373 020	47,44%	39,97%	12,60%		
4	4,01%	4 818 921	43,05%	36,27%	11,43%	9,25%	
5	3,86%	4 894 091	42,38%	35,71%	11,26%	9,11%	1,54%

Można zauważyć, że dla $n = 1, \dots, 4$ wartość znormalizowanego odsetka głosów p_n jest większa od wartości progu naturalnego t_n , ale ta nierówność przestaje być prawdziwa dla $n = 5$, ponieważ $p_5 \approx 1,54\% < 3,86\% \approx t_5$. Dlatego tylko cztery pierwsze partie można uznać za znaczące w sensie zdefiniowanym powyżej. Następnie, stosując wzór „kociołka i chochelki”, otrzymujemy:

Tabela 3

Podział mandatów w wyborach parlamentarnych w Portugalii w 2015 r.

partia	PàF	PS	BE	PCP-PEV	PAN
p_i	43,05%	36,27%	11,43%	9,25%	0%
s_i	106,95	88,37	20,33	14,35	0
liczba mandatów	107	86	19	17	1
błąd	-0,05	2,37	1,33	-2,65	-1

Po wyjaśnieniu pojęcia partii znaczącej, możemy przystąpić do sformułowania naszych trzech założeń:

A1 dla każdego okręgu istnieje taki mnożnik, że dla każdej partii znaczącej:

(a) reszty zaokrągleń uśredniają się po okręgach wyborczych do $1/2$,

(b) mnożniki nie są skorelowane ze znormalizowanymi odsetkami głosów¹⁴;

¹⁴ Warto odnotować, że jeżeli warunek A1 jest spełniony, średnia wartość mnożnika w okręgach pokrywa się ze średnio nieobciążonym mnożnikiem $m + n/2$ rozważanym przez Gfeller (1890), Joachima (1917) oraz Happachera i Pukelsheima (1996, 2000).

A2 znormalizowane odsetki głosów uzyskanych przez partie uśredniają się po wszystkich okręgach do wyników ogólnokrajowych¹⁵;

A3 wyłącznie partie znaczące otrzymują mandaty.

Założenie **A1** ma fundamentalne znaczenie dla działania naszego wzoru, ale jednocześnie jest wysoce techniczne. Jak dyskutujemy we Flis i in. (2019: Sec. 4), ma to częściowe uzasadnienie w probabilistycznym modelu wyborów opartym na pewnych postulatach dotyczących rozkładu odsetków głosów uzyskanych przez partie.

Założenie **A2** jest dość intuicyjne, w związku z czym można oczekiwać, że będzie przynajmniej w przybliżeniu spełnione w większości rzeczywistych wyborów. Poważne naruszenia tego założenia świadczyłyby o tym, że z wysokim prawdopodobieństwem mielibyśmy do czynienia z jakąś formą gerrymanderingu. Niewielkie naruszenia mogą mieć miejsce w krajach takich jak Hiszpania, w których największe okręgi wyborcze znajdują się w obszarach miejskich oraz gdzie istnieje znaczne różnice polityczne między obszarami wiejskimi i miejskimi, lub w sytuacjach, gdy odsetek głosów uzyskany przez partię jest skorelowany z frekwencją na poziomie okręgu wyborczego lub zagregowanym poparciem dla partii nieznaczących.

Założenia **A3** może zostać naruszone w następujących przypadkach:

- 1) Jeżeli poparcie niektórych partii jest silnie skoncentrowane w niewielkiej liczbie okręgów wyborczych, podczas gdy wynik uzyskany przez nie w skali kraju jest niewystarczający do zaliczenia ich do grona partii znaczących. W skrajnym przypadku niektóre ugrupowania mają charakter regionalny (np. reprezentują mniejszość narodową lub etniczną) i rejestrują listy partyjne tylko w swoim regionie. Ten ostatni problem można rozwiązać, stosując *poprawkę regionalną*, szczegółowo opisaną w załączniku A.
- 2) Jeżeli rozbieżności w wielkości okręgów wyborczych powodują duże zróżnicowanie progów naturalnych, prowadząc do sytuacji, w której komitety zbyt małe, aby kwalifikować się do podziału miejsc w okręgach średniej wielkości, otrzymują mimo to mandaty w dużych. Przykładowo, w Portugalii średnia wielkość okręgu wynosi ok. 10,45 mandatu, ale w wyborach w 2015 roku na okręg lizboński przypadało 47 mandatów, a w Porto do podziału było ich 39. Stąd dla wszystkich pozostałych okręgów próg naturalny z czterema partiami znaczącymi wynosił ok. 10,87%, podczas gdy w Lizbonie był ponad pięciokrotnie mniejszy – tylko ok. 2,04%. Zob. szerzej Barceló i Muraoka (2018).

¹⁵ Ten warunek jest równoważny założeniu, że znormalizowane odsetki głosów oddanych na partie są nie-skorelowane z wielkością okręgów wyborczych mierzoną przez sumy głosów oddanych w nich na partie znaczące.

1.3. Determinanty odchylenia od proporcjonalności

Jak widać ze wzoru na odsetek mandatów (0.2), udział mandatów każdej partii znaczącej zależy tylko od trzech zmiennych: uzyskanego przez nią odsetka głosów, średniej wielkości okręgu wyborczego i liczby partii znaczących. Należy odnotować, że zależność ta jest afiniczna, ale nie liniowa, co sugeruje, że metody Jeffersona-D'Hondta *nie należy uważać za ściśle proporcjonalną*. Jednakże trzeba również zauważyć, że wzór (0.2) można wyrazić w równoważnej postaci:

$$q_i = \frac{1}{2mt} (p_i - t), \quad (1.2)$$

pokazującej, że odsetek mandatów *jest proporcjonalny do odsetka głosów ponad progiem*.

Spośród trzech wyżej wymienionych zmiennych, średnia wielkość okręgu jest, ściśle rzecz biorąc, jedynym parametrem wzoru ustalonym z góry przez reguły wyborcze. W siedmiu z dziewięciu krajów omawianych w rozdziale 2, średnia wielkość okręgu waha się od 11 do 16 mandatów. Wyjątkami są Holandia (z pojedynczym 150-mandatowym okręgiem) i Hiszpania (z $m \approx 6,73$, czyli jednym z najniższych w Europie, zob. Baldini i Pappalardo, 2009: 67-69).

Przy zastosowaniu wzoru do szacowania podziału mandatów liczba partii znaczących nie jest parametrem, lecz jest uzyskiwana z ogólnokrajowych wyników wyborów przy użyciu procedury opisanej w podrozdziale 1.2. Jednakże gdy wzór jest wykorzystywany do analizowania sytuacji kontrfaktycznych i zadany jest tylko odsetek głosów uzyskanych przez jeden komitet, liczba ta może być traktowana jako parametr, choć uwikłany: ustalenie liczby partii znaczących zawęży zbiór możliwych wartości odsetka głosów i *vice versa*, ustalenie wysokości tego odsetka ogranicza możliwą liczbę partii znaczących¹⁶. Zgodnie z oczekiwaniami, dla rozpatrywanych przez nas państw liczba ta koreluje ze średnią wielkością okręgu¹⁷.

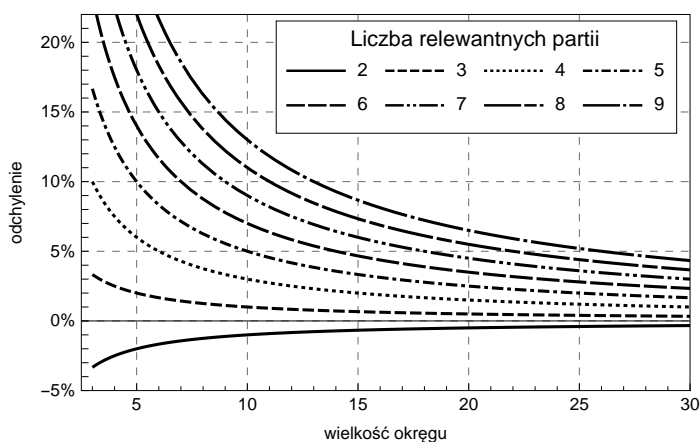
Niektóre zależności uwidocznione we wzorze na odchylenie od proporcjonalności (0.3) są dobrze znane badaczom systemów wyborczych. Na przykład nie jest oryginalne twierdzenie o wpływie małych okręgów wyborczych na liczby mandatów uzyskiwane przez niewielkie partie, gdyż wynika on ze znanej zasady mikro-mega

¹⁶ Ponieważ każda partia znacząca musi przekroczyć próg naturalny zdefiniowany w (1.1), a ich udziały głosów muszą sumować się do 1, dla ustalonych wartości m i n wartość p_i może zmieniać się w zakresie od t do $(2m + 1)t$, gdzie t jest wysokością progu naturalnego zdefiniowanego w (1.1). Analogicznie, dla ustalonych m i p_i wartość n musi zawierać się pomiędzy $1/p_i - 2m$ a $(2m + 1)/p_i - 2m$.

¹⁷ Liczba partii znaczących wykorzystywana w modelach sytuacji kontrfaktycznych może pochodzić z wcześniejszych wyborów, sondaży lub modeli statystycznych łączących ją z parametrami egzogenicznymi (takich jak *seat-product model* zaproponowany przez Shugarta i Taagepera, 2017; zob. również Taagepera, 2007; Li i Shugart, 2016 oraz Shugart i Taagepera, 2018). W ostatnim z wymienionych przypadków należy zwrócić uwagę, aby wybrać model szacujący oczekiwaną liczbę partii pod warunkiem, że istnieje komitet o danej wielkości, a nie tylko bezwarunkową wartość oczekiwaną.

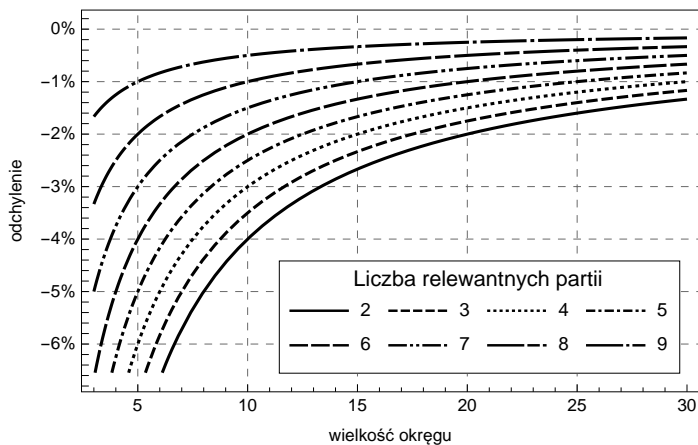
(„duże wolą małe, a małe wolą duże”, zob. Colomer, 2004) i został już dobrze udokumentowany w licznych pracach (Rae, 1967, Taagepera i Laakso, 1980, Taagepera, 1986 oraz Taagepera i Shugart, 1989). Niemniej jednak należy zauważyć, że w metodzie Jeffersona-D’Hondta efekt ten jest większy niż w innych metodach dzielnikowych, ponieważ w przypadku niewielkich partii odchylenie od proporcjonalności na ich niekorzyść działa niezależnie od efektu wykluczającego zachodzącego w małych okręgach, udokumentowanego przez Lijpharta i Gibberda (1977).

Wydaje się, że wpływ liczby partii na wielkość odchylenia od proporcjonalności umknął uwadze wielu badaczy. Wskazuje on jednak na istotny samokorygujący aspekt systemów wyborczych opartych na metodzie Jeffersona-D’Hondta: wraz ze wzrostem liczby partii rośnie odchylenie na korzyść największej partii, co przynajmniej częściowo łagodzi trudności w utworzeniu rządu spowodowane przez fragmentację legislacyjną.

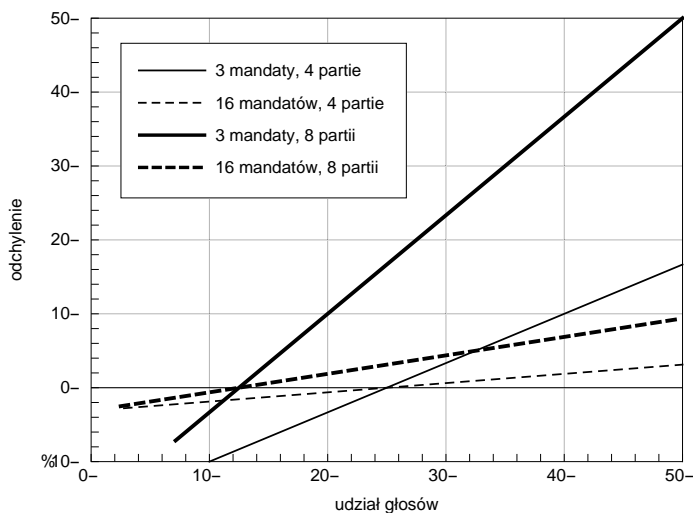


Wykres 1. Odchylenie od proporcjonalności dla partii o znormalizowanym poparciu równym 40% jako funkcja wielkości okręgu

Aby zilustrować opisane powyżej zależności, na wykresach 1 i 2 przedstawiono odchylenie od proporcjonalności dla dwóch hipotetycznych komitetów ze znormalizowanymi odsetkami głosów wynoszącymi odpowiednio 40% i 10% w zależności od liczby partii (od 2 do 9) i wielkości okręgu, zaś na wykresie 3 rzeczone odchylenie jest przedstawione jako funkcja odsetka głosów dla liczb partii wynoszących odpowiednio 4 i 8 oraz średniej wielkości okręgu ustalonej na poziomie 3 i 16 mandatów.



Wykres 2. Odchylenie od proporcjonalności dla partii (Δ) o znormalizowanym poparcu (p) równym 10% jako funkcja wielkości okręgu (m)



Wykres 3. Odchylenie od proporcjonalności (Δ) jako funkcja udziału głosów (p) dla ustalonych wartości parametrów (m, n)

2. TEST EMPIRYCZNY

Jak już wyżej wspomniano, metoda Jeffersona-D'Hondta jest powszechnie stosowana na całym świecie. Jednakże ze względu na ograniczenia dostępności danych zawężamy nasz test empiryczny do przypadków spełniających następujące kryteria:

- 1) Ogólnokrajowe wybory do niższej izby parlamentu w państwach członkowskich Unii Europejskiej po 1945 roku...
- 2) ... z jednopoziomowym systemem wyborczym i w większości wielomandatowymi okręgami wyborczymi...
- 3) ... w których stosowana jest metoda Jeffersona-D'Hondta (według stanu z marca 2019 roku).

Dokładnie dziewięć państw spełnia powyższe kryteria: Belgia, Chorwacja, Czechy, Finlandia, Hiszpania, Holandia, Luksemburg, Polska, i Portugalia. W przypadku Chorwacji pomijamy w obliczeniach mandaty przyznawane w specjalnych okręgach wyborczych wydzielonych dla mniejszości etnicznych (z zastosowaniem systemu FPTP, który jest jednak szczególnym przypadkiem metody Jeffersona-D'Hondta), gdyż ich liczba jest stosunkowo niewielka (6 na około 150), a wybory w nich odbywają się w innych terminach. Nie uwzględniamy również wyborów w Belgii sprzed 2014 roku, gdyż zazębianie się regionów Walonii i Flamandii w okręgu Bruksela-Halle-Vilvoorde uniemożliwia zastosowanie koniecznej poprawki regionalnej (zob. załącznik A). Z kolei w przypadku Finlandii pomijamy wybory sprzed 2003 roku z powodu braku danych na temat blokowania list na poziomie okręgów. Dla Polski nie bierzemy pod uwagę wyborów z lat 1993 i 1997 ze względu na wykorzystanie drugiego poziomu wyborczego (listy krajowej).

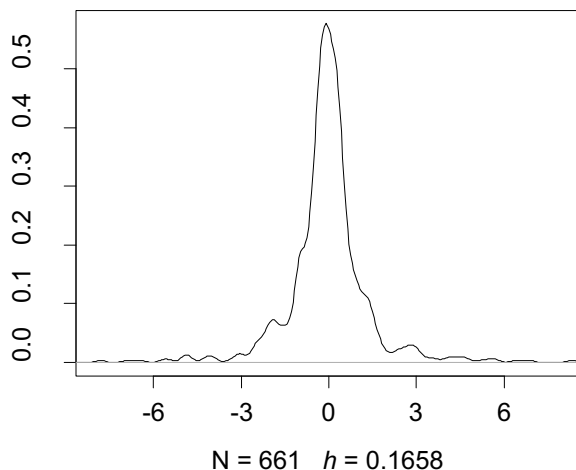
Tabela 4 przedstawia ogólne parametry systemów wyborczych w krajach będących przedmiotem naszego zainteresowania.

W siedmiu z tych dziewięciu krajów mamy do czynienia ze zdobywającymi mandaty partiami regionalnymi, takimi jak np. Konwergencja i Unia (CiU), Republikańska Lewica Katalonii (ERC), Nacjonalistyczna Partia Basków (EAJ/PNV) i wiele innych w Hiszpanii, Szwedzka Partia Ludowa (SFP/RKP) w Finlandii, Chorwacki Demokratyczny Sojusz Sławonii i Baranji (HDSSB) oraz Istrijskie Zgromadzenie Demokratyczne (IDS) w Chorwacji, Mniejszość Niemiecka (MN) w Polsce, Niezależne Stowarzyszenie Demokratyczne Makau w Portugalii w 1975 roku lub Partia Niezależnych Wschodu w Luksemburgu w 1945 roku. W Belgii wszystkie partie znaczące miały jak dotąd charakter regionalny. W związku z tym w wymienionych przypadkach stosujemy poprawkę regionalną.

Tabela 4
Parametry systemów wyborczych w testowanych krajach

Kraj	Pierwsze badane wybory	Liczba badanych wyborów	Liczba mandatów (s)	Liczba okręgów wyborczych (c)	Liczba partii znaczących (n)	
					ogólnokrajowych	regionalnych
Belgia	2014	1	150	11	0	14
Chorwacja	2000	6	143-146	11	4-7	0-2
Czechy	2002	5	200	14	4-9	0
Finlandia	2003	4	200	13-15	6-7	2
Hiszpania	1977	13	350	52	2-5	4-9
Holandia	1948	21	100-150	1	7-14	0
Luksemburg	1945	17	26-64	2-4	3-7	0-1
Polska	2005	4	460	41	4-6	1
Portugalia	1975	15	230-263	22-25	3-5	0-2

Wyniki przeprowadzonego testu empirycznego potwierdzają, że zaproponowany przez nas wzór rzeczywiście działa zgodnie z oczekiwaniami i jest odporny na niewielkie naruszenia jego założeń. Jak widać na poniższym wykresie pokazującym jądrowy estymator gęstości rozkładu błędów partii (tj. różnic pomiędzy ich faktycznymi a szacunkowymi odsetkami mandatów), w ponad 94,2% przypadków błąd oszacowania mieści się w przedziale $(-1,5\%, 1,5\%)$. Wynika to także z faktu, że w typowych warunkach spotykanych w rzeczywistych wyborach błędy wprowadzane na różnych etapach przybliżenia mają tendencję do wzajemnego znoszenia się.



Wykres 4. Jądrowy estymator gęstości rozkładu błędów dla partii. Parametr wygładzania (h) dopasowany metodą walidacji krzyżowej z metryką euklidesową

Aby zmierzyć otrzymany przy użyciu naszego wzoru błąd zagregowany dla wyborów, wykorzystujemy odległość całkowitego wahania wektorów rzeczywistych i oszacowanych wartości odsetka mandatów (równoważną, z dokładnością do stałej, ich odległości w metryce taksówkowej ℓ_1 , zob. Deza i Deza, 2014: 260):

$$\varepsilon := \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^n |s_i^{act} - s_i|, \quad (2.1)$$

gdzie s_i^{act} jest liczbą mandatów przyznanych i -tej partii w ramach faktycznej alokacji. Intuicja stojąca za wzorem (2.1) polega na tym, że ε odpowiada odsetkowi niewłaściwie przydzielonych mandatów. Ponownie otrzymujemy obiecujące wyniki, ponieważ tylko w 5 z 86 wyborów więcej niż 4% wszystkich mandatów zostało źle przydzielonych¹⁸. Oznacza to, że w porównaniu z wiodącą alternatywną formułą, tj. zmodyfikowanym prawem sześciennym dla wyborów proporcjonalnych (Taagepera, 1986), nasz wzór okazuje się być bardziej dokładny w 82 z 86 przypadków. Konkretnie wartości błędów dla poszczególnych wyborów można znaleźć w załączniku B.

3. ZASTOSOWANIA POLITOLOGICZNE

3.1. Zalety wzoru z punktu widzenia modelowania sytuacji kontrfaktycznych

Do tej pory zajmowaliśmy się głównie najprostszym przypadkiem zastosowania naszego wzoru: szacowaniem podziału mandatów na podstawie ogólnokrajowych wyników wyborów dla wszystkich partii. Jak już jednak wspominaliśmy w podrozdziale 1.3., jedną z głównych zalet naszego wzoru jest fakt, że do jego zastosowania nie potrzebujemy aż tylu informacji. W związku z tym możemy go użyć do analizy różnych sytuacji kontrfaktycznych, takich jak przesunięcia głosów, dzielenie się i łączenie partii, zmiany w liczbie okręgów wyborczych lub wprowadzanie progów ustawowych.

Oczywiście teoretycznie możliwe jest badanie takich sytuacji kontrfaktycznych bez wykorzystania wzoru „kociołka i chochelki”. Byłoby to jednak pracochłonne i skomplikowane przedsięwzięcie, możliwe do urzeczywistnienia jedynie kosztem wielu arbitralnych lub nadmiernie upraszczających założeń. Po pierwsze, należałoby w tym celu przełożyć zagregowane wyniki na poziomie kraju na wyniki na poziomie okręgów wyborczych – a zadanie to wymagałoby modelowania rozkładu wyników wyborów na szczeblu okręgowym. Obszerna literatura na temat symetrii

¹⁸ Trzy z tych pięciu przypadków miały miejsce dla wyborów w Hiszpanii w latach 1977, 1979 i 2015, w których pojawiły się znaczące korelacje pomiędzy udziałami głosów partii lewicowych (PSOE i PCE w 1977 oraz 1979, Podemos w 2015) i wielkością okręgów wyborczych. Czwarty przypadek dotyczy wyborów w Luksemburgu w 1948 r., które zostały przeprowadzone w dwóch tylko okręgach wyborczych. Ostatnim są wybory w Luksemburgu w 2018 r., w których doszło do naruszeń założenia **A1**, wynikających ze zbiegu mało prawdopodobnych zdarzeń (bardzo wąskie marginesy zwycięstwa) w połowie (dwóch z czterech) okręgów wyborczych, co byłoby wysoce nieprawdopodobne w krajach o większej liczbie okręgów.

partyjnej potwierdza, że jest to problem trudny sam w sobie, szczególnie jeżeli wzorce głosowania nie są stabilne w czasie (zob. np. Gudgin i Taylor, 1979; Katz i King, 1999; Linzer, 2012; Calvo i Rodden, 2015). Stanowi ono również wyzwanie pod względem matematycznym, ponieważ wymaga wygenerowania macierzy losowej z ograniczeniami zarówno na wiersze, jak i na kolumny. Dodatkowo, jeśli sytuacja kontrfaktyczna pociąga za sobą zmiany w udziałach głosów otrzymanych przez partie, również je należy przełożyć na przesunięcia głosów na szczeblu okręgowym. Ponownie, nawet w najprostszym przypadku systemu dwupartyjnego, wzorce tego zjawiska są dosyć złożone (Blau, 2001). Mimo że żadna z tych trudności nie jest nie do pokonania, ich rozwiązanie jest skomplikowane i czasochłonne. Co więcej, niełatwo jest odróżnić prawdziwe skutki interesującej nas sytuacji kontrfaktycznej od artefaktów wynikających z przyjętych po drodze założeń technicznych. Proponowany przez nas wzór pozwala unikać tych trudności. Kosztem stosunkowo małego błędu aproksymacji umożliwia modelowanie ogólnych efektów sytuacji kontrfaktycznych w prostszy i bardziej przejrzysty sposób.

3.2. Zmiany w strukturze systemu partyjnego: koalicje i podziały

Powszechnie wiadomo, że metoda Jeffersona-D'Hondta zachęca do zawierania koalicji (zob. Baliński i Young, 1978b; Bochsler, 2010). Wzór na odchylenie od proporcjonalności (0.3) pozwala na łatwe oszacowanie teoretycznej wartości *premii integracyjnej*, tj. różnicy między szacunkową wartością odchylenia $\Delta_{i,j}$ dla koalicji partii i oraz j a sumą szacunkowych wartości odchyleń dla każdej z nich $\Delta_i + \Delta_j$ przy założeniu, że odsetki głosów otrzymanych przez wszystkie pozostałe partie są stałe:

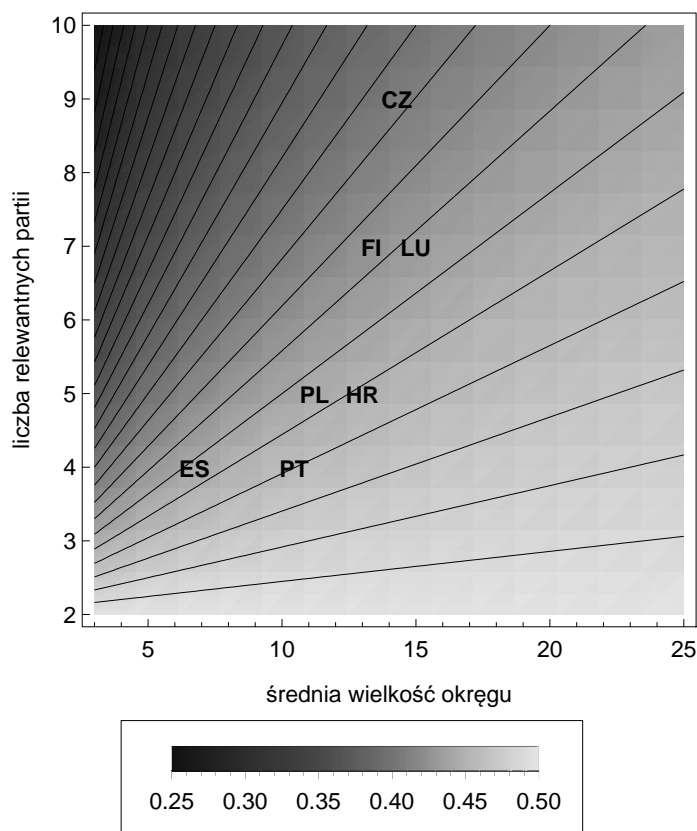
$$\Delta_{i,j} - (\Delta_i + \Delta_j) = \frac{1 - (p_i + p_j)}{2m}, \quad (3.1)$$

zob. Janson (2014: Theorem 8.1) dla analogicznej formuły asymptotycznej dla $c = 1$ i $s \rightarrow \infty$. Należy pamiętać, że wartość premii integracyjnej nie zależy od liczby partii niewchodzących w skład koalicji, lecz tylko od ich łącznego odsetka głosów, i jest ujemnie skorelowana z sumą głosów oddanych na partie do niej należące. Warto również odnotować, że jakkolwiek koalicja brana jako całość zawsze odniesie korzyść z dokonanej fuzji, fakt ten niekoniecznie stanowi dla wszystkich ugrupowań wystarczającą zachętę do połączenia się: to ostatnie będzie zależało od sposobu podziału mandatów wewnątrz koalicji (zob. Kaminski, 2001; Leutgäb i Pukelsheim, 2009; Janson, 2014; Karpov, 2015).

Oczywiście wzór na odchylenie od proporcjonalności jest sam w sobie niewystarczający do dokładnej oceny skutków powstania koalicji, ponieważ fuzja może zrazić skrajny elektorat każdej z partii członkowskich lub przeciwnie – przyciągnąć dodatkowy elektorat z powodu tzw. efektu kuli śnieżnej. Kaminski (2001) pokazuje,

że addytywność poparcia wyborców nie jest częsta. Proponowany przez nas wzór zapewnia wstępne oszacowanie premii integracyjnej i jej pochodnej względem zmiany udziału głosów.

Wzór (3.1) można łatwo przekształcić, tak aby wykorzystać go do modelowania przypadku odwrotnego: rozpadu partii lub koalicji. Ponownie, o ile wszystkie powstałe w wyniku takiego podziału ugrupowania są znaczące, suma ich mandatów nie będzie zależała od rozkładu ich głosów, a tylko od ich sumy. Można również zauważyć, że zyski z rozpadu partii lub koalicji przypadają każdemu z konkurencyjnych ugrupowań proporcjonalnie do znormalizowanego odsetka uzyskanych przez nie głosów.



Wykres 5. Minimalny odsetek głosów konieczny dla uzyskania przez partię przynajmniej połowy całkowitej liczby mandatów jako funkcja liczby partii znaczących (n) oraz średniej wielkości okręgu (m). Punkty środkowe kodów krajów odpowiadają wartościom tych parametrów dla ostatnich badanych wyborów

Kolejną możliwą do modelowania zmianą w strukturze systemu partyjnego jest pojawienie się partii-spoilerów. Wzór „kociołka i chochelki” umożliwia bardzo łatwe szacowanie kontrfaktycznych wyników wyborów bez udziału spoilera i przy rozmaitych założeniach dotyczących przesunięcia głosów tegoż spoilera, podczas gdy przeprowadzenie symulacji na poziomie okręgów wyborczych byłoby w tym przypadku bardzo złożone. Jako przykład zastosowania naszej formuły do analizy efektu spoilerów w polskich wyborach parlamentarnych z lat 1993 i 2015 zob. Kaminski (2018).

Oczywiście, podczas gdy wszystkie partie dążą do maksymalizacji liczby otrzymanych głosów, na ogół najbardziej istotnym problemem w wyborach jest uzyskanie większości mandatów. Wzór na odsetek mandatów (0.2) można przekształcić tak, aby dla dowolnej kombinacji parametrów m (średniej wielkości okręgu wyborczego) i n (liczby partii znaczących) otrzymać minimalną wartość odsetka głosów p_{Maj} przekładającą się na co najmniej połowę całkowitej liczby mandatów:

$$p_{Maj} = \frac{1 + 1/m}{2 + n/m} = (m + 1)t, \quad (3.2)$$

gdzie t jest wysokością progu naturalnego zdefiniowanego w (1.1). Jest to zobrazowane na wykresie 5.

3.3. Inżynieria wyborcza i reformy

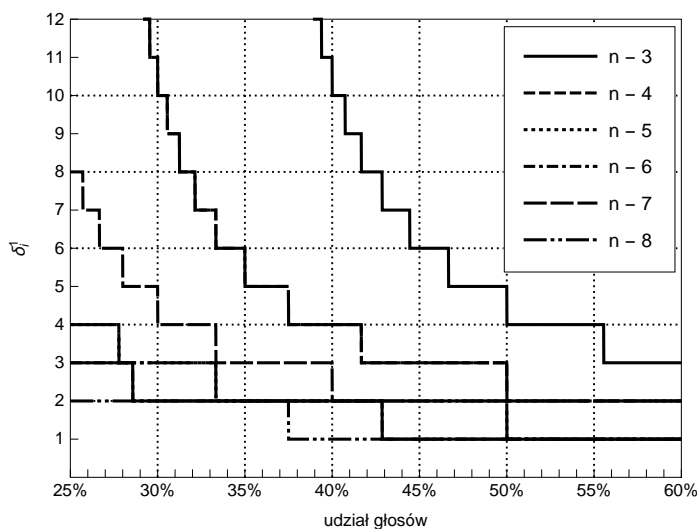
Strategie polityczne obejmują nie tylko zmiany tożsamości partii, ale także inżynierię wyborczą. W systemach proporcjonalnych rzeczona inżynieria przyjmuje zwykle postać zmian metody alokacji mandatów, wysokości progów ustawowych lub liczby (a co za tym idzie – wielkości) okręgów wyborczych (Kaminski, 2002). W pierwszym z tych przypadków wzór „kociołka i chochelki” może być wykorzystany do modelowania zmiany metody podziału mandatów w tych krajach, w których jest już stosowana jakaś forma systemu reprezentacji proporcjonalnej, oraz do uzyskania pierwszej przybliżonej oceny konsekwencji wprowadzenia ordynacji proporcjonalnej w krajach stosujących zupełnie inne systemy wyborcze. Takie przybliżenie mogłoby być szczególnie przydatne w sytuacji, w której zmiana stosowanego systemu politycznego byłaby przedmiotem poważnej debaty publicznej, jak miało to miejsce w Nowej Zelandii i Wielkiej Brytanii przed referendum dotyczącymi reform wyborczych.

W przypadku mniejszych zmian i przy założeniu, że do podziału miejsc jest stosowana metoda Jeffersona-D’Hondta, wzór „kociołka i chochelki” można wykorzystać do oszacowania ich skutków, ponownie z zastrzeżeniem korekty pod kątem efektów wtórnych, takich jak indukowana przez takie zmiany konsolidacja systemu partyjne-

go lub przesunięcia głosów. Przykładowo, ze wzoru „kociołka i chochelki” można wyliczyć liczbę okręgów, których dodanie zapewniłoby i -tej partii ($i = 1, \dots, n$) uzyskanie jednego dodatkowego mandatu:

$$\delta_i^1 := \left\lceil \frac{2}{p_i n - 1} \right\rceil. \quad (3.3)$$

Okazuje się, nieco wbrew intuicji, że δ_i^1 jest niezależne od początkowej liczby okręgów wyborczych c . Co więcej, ze wzoru (3.3) wynika, że δ_i^1 ma osobiliwość w punkcie $1/n$, co jednak nie jest zaskakujące, ponieważ w metodzie Jeffersona-D’Hondta brak jest odchylenia od proporcjonalności dla ugrupowań o średnim poparciu, więc nie uzyskają one dodatkowych mandatów niezależnie od tego, jak zwiększyłaby się liczba okręgów, o ile tylko liczba partii znaczących pozostałaby niezmienną. Oczywiście w praktyce przedział, w którym zmiana liczby uzyskanych mandatów nie jest możliwa, jest szerszy, ponieważ liczba okręgów jest ograniczona z góry przez całkowitą liczbę mandatów. Zauważmy, że dla małych partii ($p_i < 1/n$) δ_i^1 jest ujemna, tracą bowiem one mandaty zamiast je zyskiwać, gdy liczba okręgów rośnie.



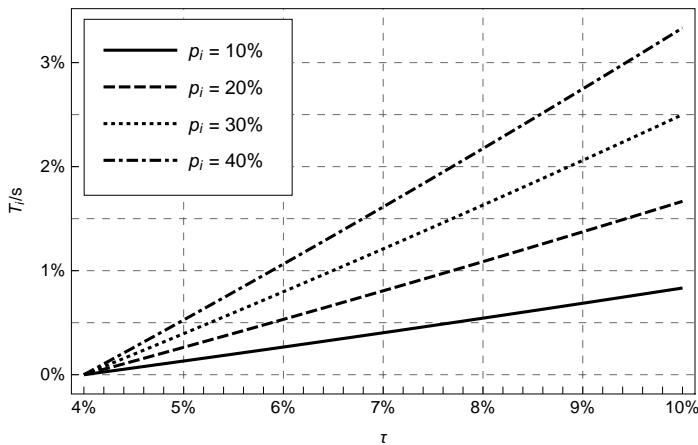
Wykres 6. Liczba okręgów δ_i^1 , których dodanie (do danej początkowej liczby okręgów c) spowoduje uzyskanie przez i -tą partię dodatkowego mandatu, jako funkcja udziału głosów i -tej partii p_i oraz liczby partii znaczących n

Ustawowe (sztuczne) progi są kolejnym narzędziem inżynierii wyborczej. W przeciwieństwie do progów naturalnych, zob. podrozdział 1.2., powodują one (jeżeli są większe niż te ostatnie) powstawanie nieciągłości w krzywych *seats-votes* pokazu-

jących zależność liczby mandatów od odsetka głosów dla wszystkich partii¹⁹. Takie nieciągłości można łatwo opisać wzorem. Niech $\tau > t$ będzie progiem ustawowym. Załóżmy, że $n - 1$ ugrupowań go przekracza, zaś sytuacja n -tego komitetu jest niepewna. Należy odnotować, że rzeczona n -ta partia nie musi być najmniejsza – ze względu na możliwość istnienia różnych progów dla różnych typów komitetów wyborczych może pojawić się sytuacja, w której pewne ugrupowanie nie przekroczy swojego progu, podczas gdy jego mniejszym konkurentom się to uda²⁰. Wówczas odsetek mandatów uzyskanych przez i -tą partię ($i = 1, \dots, n - 1$) w wyniku nieprzekroczenia progu przez n -ty komitet wzrośnie o:

$$T_i = \frac{p_i}{2m} \left(\frac{\tau/t - 1}{1 - \tau} \right), \quad (3.4)$$

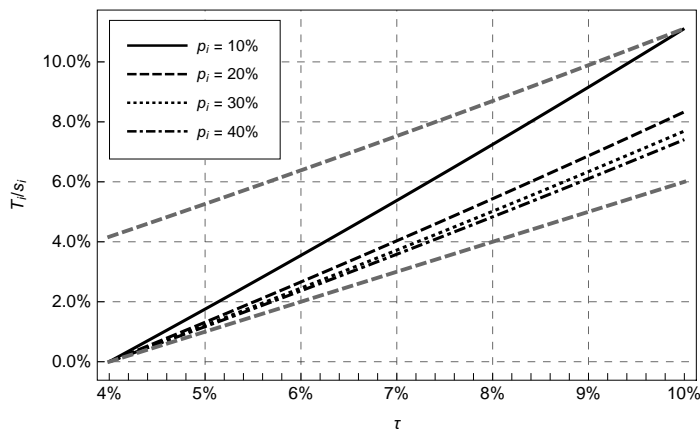
gdzie t jest progiem naturalnym określonym wzorem (1.1). Należy zauważyć, że dla $\tau = t$ (tj., gdy próg ustawowy pokrywa się z progiem naturalnym), $T_i = 0$, a nieciągłość znika. Dalsze następstwa tego wyniku są omówione w załączniku C, zaś zależność T_i od τ ilustrują rysunki 7 i 8.



Wykres 7. Zysk w mandatach T_i z nieprzekroczenia ustawowego progu wyborczego przez jednego konkurenta (szacowany przy założeniu $m = 10$ i $n = 5$, a więc $t = 1/25$)

¹⁹ Progi ustawowe występują w czterech z dziewięciu krajów omawianych w rozdziale 2. W Holandii próg ustawowy jest równy kwocie Hare'a (1/150), a w Chorwacji, Czechach i Polsce wynosi 5%. W dwóch ostatnich z tych krajów obowiązują również oddzielne progi dla koalicji (8% w Polsce i 5% pomnożone przez liczbę partii wchodzących w skład koalicji w Czechach).

²⁰ Przykładowo, w Polsce w 2015 r. Zjednoczona Lewica otrzymała 7,55% poparcia, a więc nie udało jej się przekroczyć 8%-owego progu koalicyjnego, podczas gdy Polskie Stronnictwo Ludowe weszło do Sejmu z niższym poparciem wynoszącym 5,13%.



Wykres 8. Względny zysk w mandatach T_i/p_i z nieprzekroczenia ustawowego progu wyborczego przez jednego konkurenta (szacowany przy założeniu $m = 10$ i $n = 5$, a więc $t = 1/25$). Szare linie przerywane odpowiadają ograniczeniom górnemu i dolnemu tej wielkości danym przez wzory: (C.4), opisującemu prostą, oraz (C.5), opisującemu fragment hiperboli

Powyższy wynik umożliwia odpowiedź na kolejne mogące zainteresować politologów pytanie. Załóżmy, że istnieją dwa bloki partyjne: A i B , złożone z n_A i n_B partii, dla których łączny odsetek uzyskanych głosów wynosi odpowiednio p_A i p_B , a także jedna balansująca na granicy progu ustawowego tzw. partia obrotowa C . Które ugrupowanie skorzystałoby na nieosiągnięciu progu przez C ? Gdyby korzyść miała być mierzona liczbą uzyskanych mandatów, odpowiedź byłaby prosta: z addytywności wzoru (3.4) wynika, że blok o większym zagregowanym udziale w głosach wyborców przechwyciłby większą liczbę zwolnionych przez C mandatów. Jeżeli jednak korzyść ta miałaby być mierzona uzyskaniem większości ustawodawczej, problem staje się nieco mniej trywialny. Gdyby ugrupowanie C nie zdołało przekroczyć progu ustawowego, blok A byłby w stanie rządzić wtedy i tylko wtedy, gdyby spowodowany tym faktem wzrost odsetka uzyskanych przez niego mandatów przewyższył dodatkowy udział w mandatach konieczny do uzyskania większości, tj. gdyby, korzystając z (3.4) i (0.2), zachodziło

$$\frac{p_A}{2m} \left(\frac{\tau/t - 1}{1 - \tau} \right) > \frac{1}{2} - p_A \left(1 + \frac{n}{2m} \right) + \frac{n_A}{2m}. \quad (3.5)$$

Jak pokazano w załączniku C, warunek ten jest równoważny nierówności

$$\frac{p_A}{m + n_A} > \frac{p_B}{m + n_B}. \quad (3.6)$$

W związku z powyższym odpowiedź na pytanie kto będzie beneficjentem nieprzekroczenia progu ustawowego przez partię obrotową zależy nie tylko od wielkości dwóch rywalizujących bloków, ale także od stopnia ich konsolidacji.

4. KIERUNKI PRZYSZŁYCH BADAŃ

Potencjalne kierunki przyszłych badań, w których wzór „kociołka i chochelki” może być przydatny, nie umknęły naszej uwadze. Niektóre z nich polegają na dostosowaniu formuły do możliwych modyfikacji metody Jeffersona-D’Hondta, takich jak wielopoziomowa alokacja mandatów, lub znacznych odstępstw od przyjętych przez nas założeń. Inne dotyczą jej zastosowania do teoretycznej analizy zależności pomiędzy głosami a mandatami. Na tym polu warto zauważyć, że wzór „kociołka i chochelki” umożliwia uogólnienie na systemy wielopartyjne służącej do wykrywania gerrymanderingu metody analizy różnic efektywności wykorzystania głosów (ang. *efficiency gap test*) McGhee-Stephanopoulosa. Ponadto, w przypadku systemu dwupartyjnego analiza relacji pomiędzy stosunkiem zdobytych przez partie mandatów a stosunkiem uzyskanych przez nie głosów daje funkcyjną zależność zbliżoną do zmodyfikowanego prawa sześciennego Taagepera dla wyborów proporcjonalnych (Taagepera, 1986), ale z liczbą Eulera $e \approx 2,71$ zamiast liczby 3 w wykładniku funkcji potęgowej (dla dowodu zob. Flis i in., 2019: Sec. 8). Dwa z wyżej wymienionych przyszłych kierunków badań zostały omówione bardziej szczegółowo poniżej.

4.1. Poprawki

Jak wspominaliśmy w rozdziale 2, formuła „kociołka i chochelki” jest dość odporna na drobne naruszenia przyjętych założeń. Niemniej jednak w niektórych przypadkach są one na tyle duże, że otrzymane przybliżenie jest obciążone znacznym błędem (zob. przypis 18). Aby go uniknąć, możliwe jest opracowanie korekt poprawiających jakość aproksymacji, aczkolwiek kosztem skomplikowania wzorów. Nie podejmujemy się tego w niniejszym artykule, ponieważ praktycznie we wszystkich przypadkach takie poprawki wymagałyby dodatkowych informacji dotyczących przestrzennego rozkładu głosów każdego z komitetów (np. kowariancji znormalizowanych odsetków głosów na poziomie okręgów wyborczych i wielkości tych okręgów), które nie są ani znane przed wyborami, ani podawane w ramach sondaży przedwyborczych. *Poprawka regionalna* opisana w załączniku A jest tutaj wyjątkiem, ale stosujemy ją w pracy tylko dlatego, że dotyczy ekstremalnego przykładu anomalii, w której partie regionalne nawet nie wystawiają kandydatów w części okręgów.

Oczywiście w niektórych przypadkach może być możliwe uzyskiwanie dodatkowych informacji na podstawie wzorców historycznych lub danych demograficznych. Jednym z przykładów poprawki *ad hoc* do wzoru „kociołka i chochelki” wykorzystującej tego typu podejście jest niedawna praca Evciego i Kaminskiego (2019), w której taka poprawka została zastosowana dla poradzenia sobie z anomaliami rozkładów

poparcia dla tureckiego systemu partyjnego (gdzie kurdyjska partia HDP ma wiele cech partii regionalnej, z poparciem mocno skoncentrowanym w południowo-wschodniej części Turcji, ale rejestruje listy kandydatów w całym kraju, co wyklucza zastosowanie naszej poprawki regionalnej). Uważamy jednak, że wnioskowanie na podstawie wzorców historycznych wymaga znacznej ostrożności, ponieważ wiele interesujących nas parametrów jest bardzo niestabilnych i może ulec zmianie nie tylko w wyniku znaczących przetasowań politycznych, ale nawet wskutek zwykłego przesunięcia głosów. Dla przykładu, wybory parlamentarne w Polsce w latach 2007 i 2011 charakteryzowały się wysoką korelacją pomiędzy frekwencją w okręgach i poparciem w nich dla każdej z dwóch wiodących partii (dodatnią dla zwycięskiej PO i ujemną dla przegranego PiS), która praktycznie znikła w wyborach z 2015 roku. Poza tym wnioskowanie na podstawie historycznych wzorców rozkładu głosów jest oczywiście niemożliwe w przypadku nowych ugrupowań, co jest szczególnie znaczącą wadą takiego podejścia w czasie gdy systemy partyjne w wielu krajach ulegają ciągłym przekształceniom.

4.2. Rozszerzenie metody analizy różnicy efektywności wykorzystania głosów

System wyborczy FPTP stosowany w ponad 60 krajach (ACE Project 2019), w tym w Stanach Zjednoczonych, Wielkiej Brytanii i większości państw członkowskich Wspólnoty Narodów, można traktować jako szczególny przypadek metody Jeffersona-D'Hondta (lub innych metod dzielnikowych). Zastosujemy więc naszą formułę do przypadku powyższego systemu z dwiema partiami znaczącymi, tj. dla $m = 1$ i $n = 2$. Otrzymujemy

$$s_i = s \left(2p_i - \frac{1}{2} \right). \quad (4.1)$$

Zauważmy, że w tym przypadku wartość progu naturalnego wynosi $1/(2m + n) = 1/4$, a część przyjętych przez nas założeń ulega uproszczeniu: **A2** staje się równoważne warunkowi braku korelacji pomiędzy znormalizowanym odsetkiem głosów obu partii znaczących a ich łączną liczbą głosów, zaś **A1** jest równoznaczne założeniu, że odsetki głosów *zmarnowanych* obu tych partii, zdefiniowane jako nadwyżka ponad $1/2$ dla zwycięskiego ugrupowania i cały odsetek głosów oddanych w przypadku przegranego komitetu, a więc równoważne połowie naszych reszt zaokrągleń, są równe. Warto odnotować, że założenie to jest równoważne warunkowi postulowanemu przez metodę *analizy różnicy efektywności wykorzystania głosów* McGhee-Stephanopoulosa (Stephanopoulos i McGhee, 2015), stanowiącą obecnie jeden z wiodących sposobów wykrywania gerrymanderingu. Co więcej, w przypadku jednomandatowych okręgów wyborczych wzór „kociołka i chochelki” (4.1) pokrywa się z ich wzorem na zależność mandatów od głosów. Oznacza

to, że restrykcyjne założenie metody McGhee-Stephanopoulosa, głoszące że suma znormalizowanych odsetków głosów obu partii znaczących jest stała we wszystkich okręgach wyborczych, można złagodzić, wymagając jedynie braku korelacji tej wielkości z udziałami głosów obu ugrupowań i otrzymując w ten sposób uogólnienie metody analizy różnicy efektywności wykorzystania głosów.

Podjęto ostatnio szereg prób rozszerzenia metody analizy różnicy efektywności wykorzystania głosów na systemy wielopartyjne (McGhee, 2017; Stephanopoulos i McGhee, 2018; Tapp, 2018; Veomett, 2018). Główna trudność tego zadania polega na naturalnym rozszerzeniu definicji głosów zmarnowanych, gdy rywalizacja odbywa się między więcej niż dwoma partiami. Naszym zdaniem takie właśnie naturalne uogólnienie stanowi identyfikacja głosów zmarnowanych z resztami zaokrągleń, mająca zastosowanie nie tylko do systemów wielopartyjnych, ale również do wielomandatowych okręgów wyborczych (Flis i in., 2019: Sec. 7).

5. WNIOSKI

Prezentowany w niniejszym artykule wzór „kociołka i chochelki” ma wiele praktycznych i teoretycznych zastosowań. Po pierwsze, umożliwia łatwe przeliczanie odsetków głosów na liczby mandatów, co stanowi naturalne uzupełnienie wyników sondaży i exit polls. W takich przypadkach zagregowane krajowe udziały głosów są zwykle jedyną znaną informacją. Przełożenia ich na wyniki na poziomie okręgów wyborczych można dokonać jedynie za pomocą złożonych i niestabilnych modeli demograficznych. Ponadto takie modele są szczególnie zawodne w przypadku nowych ugrupowań, dla których nie można określić wzorców ich poparcia terytorialnego na podstawie wcześniejszych wyborów. Nasz wzór stanowi prostą alternatywę, która opiera się wyłącznie na zagregowanych wynikach oraz liczbie mandatów i okręgów wyborczych, a jednocześnie zapewnia wysoki stopień dokładności.

Po drugie, formuła „kociołka i chochelki” umożliwia naukowcom i praktykom prowadzenie symulacji sytuacji kontrfaktycznych bez konieczności stosowania restrykcyjnych założeń na temat przestrzennego rozkładu poparcia partii, co czyni z niej przydatne narzędzie do ewaluacji strategii politycznych i analizy różnych hipotetycznych scenariuszy, a także do oceny skutków inżynierii wyborczej. Wzór można również wykorzystać do oszacowania dla każdej partii oczekiwanych konsekwencji reform wyborczych obejmujących zmiany średniej wielkości okręgów wyborczych i wysokości progu ustawowego. Zaprezentowanie przez jednego z autorów niniejszego artykułu (J.F.) tego typu wyników podczas debaty publicznej w 2017 roku poświęconej reformie systemu wyborów samorządowych w Polsce przyczyniło się do decy-

zji partii rządzącej o wycofaniu kontrowersyjnej propozycji zmniejszenia wielkości okręgów wyborczych.

Po trzecie, nasza praca wyjaśnia, w jaki sposób odchylenie od proporcjonalności metody Jeffersona-D'Hondta zależy od średniej wielkości okręgu wyborczego i liczby ugrupowań. Jakkolwiek zależność tego odchylenia od wielkości okręgu, uchwycona przez zasadę mikro-mega, była dobrze znana badaczom systemów wyborczych, jego związek z liczbą partii nie był z kolei wystarczająco doceniany poza sferą czysto matematycznego modelowania tego zjawiska. Pokazujemy, w jaki sposób i przy jakich warunkach te dwa aspekty badań nad systemami wyborczymi można połączyć, rysując pełny obraz warunków determinujących wielkość odchylenia od proporcjonalności.

Po czwarte, formuła „kociołka i chochelki” daje jasne kryterium normatywne braku „skrzywienia” proporcjonalnego systemu wyborczego stosującego metodę Jeffersona-D'Hondta. Znaczące różnice pomiędzy faktycznymi wynikami wyborów a wynikami uzyskanymi przy użyciu naszego wzoru wskazują niejako na „skrzywienie” tych pierwszych – czy to wskutek pewnych nienaturalnych korelacji (niewykluczone, że wynikających z dysproporcji w wielkości okręgów wyborczych lub gerrymanderingu), czy też jakichś losowych artefaktów numerycznych systemu.

6. PODZIĘKOWANIA

Chcielibyśmy podziękować Karolowi Życzkowskiemu za cenne dyskusje kluczowe dla odkrycia przez nas wzoru podanego w tym artykule. Jesteśmy wdzięczni Markowi Kamińskiemu i Reinowi Taageperze za dogłębne komentarze do wcześniejszych wersji tego tekstu podczas wizyty badawczej jednego z autorów (J.F.) w UCI Center for the Study of Democracy, Friedrichowi Pukelsheimowi za wnikliwe sugestie i pomoc w uzyskaniu części cytowanych przez nas referencji, Jackowi Hamanowi i Bartłomiejowi Michalakowi za ich owocne uwagi oraz anonimowemu recenzentowi, który udzielił wielu pomocnych wskazówek, jak ulepszyć artykuł.

Wyrażamy również wdzięczność za wsparcie finansowe Narodowego Centrum Nauki w ramach grantu nr. 2014/13/B/HS5/00862, *Badanie skali zjawiska gerrymanderingu w polskich wyborach do rad gmin w 2014 r.*

7. ZAŁĄCZNIK A. POPRAWKA REGIONALNA

Jak odnotowaliśmy w kontekście założenia **A3**, partie regionalne stanowią poważny problem dla zastosowania formuły „kociołka i chochelki”, ponieważ całe ich poparcie jest skoncentrowane w niewielkiej liczbie okręgów wyborczych. W związku z tym ogólnokrajowe odsetki głosów są słabym przybliżeniem ich faktycznego poparcia w tych okręgach. Jeśli znane są ich dokładne udziały głosów w skali regionalnej, ponieważ przeprowadzane są tam na przykład oddzielne sondaże (jak zwykle ma to miejsce w Hiszpanii), problemu można uniknąć, stosując wzór „kociołka i chochelki” niezależnie dla każdego z tych regionów i sumując otrzymane wyniki. Jednak nawet jeżeli takie dane nie są dostępne, oszacowanie podziału mandatów na podstawie ogólnokrajowych wyników wyborów jest nadal możliwe, pod warunkiem że przed wyborami wiadomo, które partie startują w poszczególnych okręgach wyborczych i jeżeli spełnione są pewne dodatkowe założenia.

Każde ugrupowanie niewystawiające kandydatów we wszystkich okręgach wyborczych nazwijmy *partią regionalną*, zaś pozostałe komitety – *partiami ogólnokrajowymi*. Zbiór okręgów, w których startuje partia regionalna, będziemy określać mianem *regionu*. Ponadto będziemy traktować zbiór okręgów, w których kandydatów nie wystawia żadna partia regionalna, jako kolejny „sztuczny” region. Używając powyższej terminologii, możemy wyrazić założenia dotyczące poprawki regionalnej w następujący sposób:

R1 regiony są parami rozłączne;

R2 stosunek liczby głosów do liczby mandatów jest stały we wszystkich regionach;

R3 względna wielkość każdej pary partii ogólnokrajowych (tj. stosunek ich udziałów głosów) jest stała we wszystkich regionach.

Założenia **R1** i **R2** wydają się naturalne (choć **R1** jest dość restrykcyjne – na przykład uniemożliwia zastosowanie poprawki regionalnej w przypadku wyborów w Belgii sprzed 2014 roku, ponieważ regiony Walonia i Flamandia zazębiały się w okręgu Bruksela-Halle-Vilvoorde). Warunek **R3** jest mniej oczywisty, ale skutki jego naruszeń mają tendencję do wzajemnego znoszenia się w skali ogólnokrajowej.

Jeżeli (zgodnie z **R1**) całe poparcie partii regionalnej i jest skoncentrowane w jednym regionie r , z **R2** wynika, że jej regionalny odsetek głosów wyraża się następującym wzorem:

$$P_i^r := P_i \frac{v}{v^r} = P_i \frac{s}{s^r}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie P_i jest udziałem i -tej partii w głosach w skali kraju, P_i^r jest jej udziałem w głosach w regionie r (obie wielkości są nieznormalizowane), v i s są, odpowiednio, ogólnokrajowymi liczbami głosów i mandatów, zaś v^r i s^r są, kolejno, regionalnymi liczbami głosów i mandatów. Aby regionalne udziały głosów sumowały się do 1, odsetki głosów *partii ogólnokrajowych* muszą zostać przeskalowane (zgodnie z **R3**) do:

$$P_j^r := P_j \frac{1 - \sum_{l \in R^r} P_l^r}{1 - \sum_{l \in R} P_l}, \quad (\text{A.2})$$

gdzie R jest zbiorem wszystkich partii regionalnych, zaś R^r zbiorem wszystkich partii regionalnych wystawiających kandydatów w regionie r . W pojedynczym regionie bez partii regionalnych, powyższy wzór uprości się do postaci:

$$P_j^0 := \frac{P_j}{1 - \sum_{l \in R} P_l}. \quad (\text{A.3})$$

Przy takich przybliżeniach regionalnych udziałów głosów oraz dokładnych danych na temat liczby mandatów i okręgów wyborczych w każdym regionie, wzór „kociołka i chochelki” można zastosować dla każdego regionu bez żadnych dalszych modyfikacji.

8. ZAŁĄCZNIK B. ZAGREGOWANE BŁĘDY DLA WYBORÓW POWSZECHNYCH W DZIEWIĘCIU KRAJACH CZŁONKOWSKICH UNII EUROPEJSKIEJ PO 1945 ROKU

Błąd w tabeli 5 jest zdefiniowany jako odsetek niewłaściwie przydzielonych mandatów, tj. odległość całkowitego wahanía wektorów rzeczywistych i oszacowanych wartości odsetków mandatów, a zmodyfikowane prawo sześcienne odnosi się do oszacowania udziału mandatów uzyskanych przy użyciu zmodyfikowanego prawa sześciennego Taagepera (1986) dla wyborów proporcjonalnych²¹.

²¹ Oczekiwany udział mandatów i -tej partii dany przez zmodyfikowane prawo sześcienne Taagepera wynosi $q_i = P_i^x / (P_i^x + (\eta - 1)^{1-x} (1 - P_i)^x)$, gdzie $x := (\log v / \log s)^{1/m}$, v jest liczbą wyborców, s jest liczbą mandatów, P_i jest nieznormalizowanym odsetkiem głosów i -tej partii, a η jest efektywną liczbą partii, tj., $\eta := (\sum_{i=1}^n P_i^2)^{-1}$.

Tabela 5

Zagregowane błędy dla wyborów parlamentarnych w dziewięciu krajach członkowskich Unii Europejskiej po 1945 r.

kraj	rok	mandaty	okręgi	partie znaczące*	błąd wzoru „chochelki i kociołka”	błąd zmodyfikowanego prawa sześciennego
Belgia	2014	150	11	7	3,8%	4,7%
Chorwacja	2000	146	11	4	1,1%	1,8%
	2003	144	11	7,3	1,6%	7,5%
	2007	145	11	6,3	1,7%	8,5%
	2011	143	11	3,5	3,1%	5,2%
	2015			5,2	1,8%	5,6%
	2016			5,4	2,5%	3,9%
Czechy	2002	200	14	4	1,0%	0,8%
	2006			5	1,6%	3,9%
	2010			5	0,9%	1,5%
	2013			7	2,5%	2,5%
	2017			9	2,3%	5,9%
Finlandia	2003	200	15	6,4	1,8%	3,9%
	2007			7,4	2,9%	3,9%
	2011			7,4	3,5%	4,1%
	2015	200	13	7,4	2,8%	3,2%
Hiszpania	1977	350	52	4,3	5,2%	7,6%
	1979			4,5	6,2%	7,8%
	1982			3,3	3,6%	4,7%
	1986			3,5	3,2%	3,4%
	1989			4,5	1,5%	6,9%
	1993			3,7	1,7%	4,9%
	1996			3,4	2,4%	3,2%
	2000			2,9	3,2%	2,9%
	2004			2,5	2,1%	2,2%
	2008			2,3	1,2%	1,8%
	2011			2,9	3,5%	3,3%
	2015			4,4	4,1%	6,0%
	2016			4,4	2,7%	4,3%

kraj	rok	mandaty	okręgi	partie znaczące*	błąd wzoru „chochelki i kociółka”	błąd zmodyfikowanego prawa sześciennego
Holandia	1948	100	1	8	1,0%	1,3%
	1952			8	0,7%	1,4%
	1956			7	0,4%	0,6%
	1959			8	0,8%	1,5%
	1963			10	0,8%	1,2%
	1967			11	0,9%	1,5%
	1971			14	1,2%	2,2%
	1972			14	1,1%	1,7%
	1977			11	0,5%	1,9%
	1981			10	0,9%	1,0%
	1982	150	1	12	0,9%	1,9%
	1986			9	0,8%	1,8%
	1989			9	0,8%	1,8%
	1994			12	1,0%	2,0%
	1998			9	0,8%	1,0%
	2002			10	0,8%	1,5%
	2003			9	0,9%	1,2%
	2006			10	1,0%	1,1%
	2010			10	1,0%	0,9%
	2012			11	1,1%	1,7%
	2017			13	1,0%	1,2%
Luksemburg	1945	51	4	4,3	2,1%	7,5%
	1948	26	2	4	4,7%	5,0%
	1951			3	1,5%	4,2%
	1954			4	2,3%	6,5%
	1959	52	4	4	2,7%	5,6%
	1964	56	4	5	1,4%	5,9%
	1968			4	2,7%	4,9%
	1974			5	1,9%	2,9%
	1979	59	4	6	2,8%	6,8%
	1984	64	4	5	3,1%	5,4%
	1989			7	3,7%	6,7%
	1994			5	1,3%	3,0%
	1999	60	4	6	3,9%	5,0%
	2004			5	1,8%	3,8%
	2009			6	1,6%	4,5%
	2013			7	2,4%	5,6%
	2018			7	4,8%	7,4%
Polska	2005	460	41	6	1,2%	3,2%
	2007			4	1,3%	3,0%
	2011			5	0,9%	4,9%
	2015			5	1,5%	5,0%

kraj	rok	mandaty	okręgi	partie znaczące*	błąd wzoru „chochelki i kociolka”	błąd zmodyfikowanego prawa sześciennego
Portugalia	1975	250	25	5	2,4%	4,4%
	1976	263	24	4	1,3%	1,7%
	1979	250	22	3	0,4%	1,5%
	1980			3	0,6%	1,0%
	1983			4	1,0%	1,6%
	1985			5	1,4%	2,9%
	1987			5	2,1%	5,0%
	1991	230	22	4	2,6%	3,3%
	1995			4	1,1%	3,4%
	1999			4	2,3%	2,7%
	2002			4	2,5%	3,3%
	2005			5	1,6%	5,0%
	2009			5	2,6%	4,9%
	2011			5	2,3%	3,8%
	2015			4	1,6%	3,2%

* Uśrednione po wszystkich regionach.

Źródło: Global Election Database (Brancati 2007) dla wyborów sprzed 2007 roku, Constituency-Level Elections Archive (Kollman i in. 2017) oraz strony internetowe krajowych organów wyborczych dla późniejszych wyborów.

9. ZAŁĄCZNIK C. PROGI USTAWOWE

Niech $t := (2m + n)^{-1}$ będzie wysokością progu naturalnego dla pewnego ustalonego n , i niech $\tau > t$ będzie wysokością progu ustawowego. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że ten sam próg obowiązuje dla wszystkich ugrupowań, i że $p_1 \geq \dots \geq p_n$. Załóżmy, że $p_{n-1} \geq \tau$ oraz $p_n \geq t$. Rozważmy odsetek mandatów i -tej partii, q_i , gdzie $i = 1, \dots, n - 1$, jako funkcję zmiennej p_n . Łatwo zauważyć, że q_i ma nieusuwalną nieciągłość pierwszego rodzaju w τ , a jego oscylację w tym punkcie, T_i , można łatwo uzyskać ze wzoru na odsetek mandatów (0.2):

$$T_i := \lim_{p_n \rightarrow \tau^-} q_i - \lim_{p_n \rightarrow \tau^+} q_i = \frac{p_i}{2m} \left(\frac{\tau/t - 1}{1 - \tau} \right). \quad (\text{C.1})$$

Wzór (C.1) można łatwo uogólnić na przypadek, w którym przekroczenie progu przez k spośród n partii jest niepewne (przy założeniu $i = 1, \dots, n - k$):

$$T_i(k) = \frac{p_i}{2m} \left(\frac{\tau/t - 1}{1/k - \tau} \right). \quad (\text{C.2})$$

Względny zysk partii w liczbie mandatów uzyskanych wskutek nieprzekroczenia progu przez jej oponentów może być wyrażony następującym wzorem:

$$\frac{T_i(k)}{q_i} = \frac{\tau - t}{(1/k - \tau)(1 - t/p_i)} \approx \frac{\tau - t}{(1/k - t)(1 - t/p_i)}. \quad (C.3)$$

Zauważmy, że

$$\frac{T_i(k)}{q_i} = \frac{\tau - t}{(1/k - \tau)(1 - t/p_i)} \geq k \frac{\tau - t}{1 - t/p_i} \geq k(\tau - t) \quad (C.4)$$

oraz

$$\frac{T_i(k)}{q_i} = \frac{\tau - t}{(1/k - \tau)(1 - t/p_i)} \leq \frac{\tau}{1/k - \tau}. \quad (C.5)$$

Stąd dla $k = 1$ względny zysk partii z nieprzekroczenia progu przez jedno ugrupowanie spełnia nierówności $\tau - t \leq T_i/q_i \leq \tau/(1 - \tau)$.

Przechodząc do kolejnej kwestii przedstawionej w podrozdziale 3.3., dotyczącej problemu „partii obrotowej”, przypomnijmy, że p_A i q_A oznaczają, odpowiednio, łączny odsetek głosów oraz odsetek mandatów uzyskanych przez blok partyjny A. Jakie warunki muszą zostać spełnione, aby blok A odniósł korzyść z nieprzekroczenia progu przez partię obrotową? Odpowiedź na to pytanie jest równoważna następującym nierównościom:

$$\frac{p_A}{2m} \left(\frac{\tau/t - 1}{1 - \tau} \right) > \frac{1}{2} - p_A \left(1 + \frac{n}{2m} \right) + \frac{n_A}{2m}, \quad (C.6)$$

$$p_A \frac{\tau/t - 1}{1 - \tau} > m - p_A(2m + n) + n_A, \quad (C.7)$$

$$p_A \frac{1 - t}{t(1 - \tau)} > m + n_A, \quad (C.8)$$

$$p_A > \left(\frac{m + n_A}{2m + n} \right) \left(\frac{1 - \tau}{1 - t} \right) = \left(\frac{m + n_A}{2m + n} \right) \left(\frac{p_A + p_B}{1 - t} \right), \quad (C.9)$$

skąd ostatecznie

$$\frac{p_A}{m + n_A} > \frac{p_B}{m + n_B}. \quad (C.10)$$

BIBLIOGRAFIA

- ACE Project (2019). *Electoral system (Chamber 1)*. ACE Electoral Knowledge Network. <http://aceproject.org/epic-en/CDMap?question=ES005&f=>.
- Baldini, G., Pappalardo, A. (2009). *Elections, electoral systems and volatile voters*. Basingstoke: Palgrave Macmillan.

- Balinski, M.L., Young, H.P. (1978a). The Jefferson method of apportionment. *SIAM Review*, 20(3), 278–284, doi: 10.1137/1020040.
- Balinski, M.L., Young, H.P. (1978b). Stability, coalitions and schisms in proportional representation systems. *American Political Science Review*, 72(3), 848–858, doi: 10.2307/1955106.
- Balinski, M.L., Young, H.P. (2001). *Fair representation: meeting the ideal of one man, one vote*. Washington, DC: Brookings Institution Press.
- Barceló, J., Muraoka, T. (2018). The effect of variance in district magnitude on party system inflation. *Electoral Studies*, 54, 44–55, doi: 10.1016/j.electstud.2018.04.016.
- Benoit, K. (2000). Which electoral formula is the most proportional? A new look with new evidence. *Political Analysis*, 8(4), 381–388, doi: 10.1093/oxfordjournals.pan.a029822.
- Blau, A. (2001). Partisan bias in British general elections. *British Elections & Parties Review*, 11(1), 46–65, doi: 10.1080/13689880108413053.
- Bochsler, D. (2010). Who gains from apparentments under D'Hondt? *Electoral Studies*, 29(4), 617–627, doi: 10.1016/j.electstud.2010.06.001.
- Bormann, N.C., Golder, M. (2013). Democratic electoral systems around the world, 1946–2011. *Electoral Studies*, 32(2), 360–369, doi: 10.1016/j.electstud.2013.01.005.
- Brancati, D. (2007). *Global Elections Database*. <http://www.globalelectionsdatabase.com>.
- Calvo, E., Rodden, J. (2015). The Achilles heel of plurality systems: geography and representation in multiparty democracies. *American Journal of Political Science*, 59(4), 789–805, doi: 10.1111/ajps.12167.
- Carey, J.M. (2017). Electoral system design in new democracies. W: Herron, E., Pekkanen, R., Shugart, M.S. (red.), *Oxford handbook of electoral systems*. New York: Oxford UP, 85111, doi: 10.1093/oxfordhb/9780190258658.001.0001.
- Chafee, Z. (1929). Congressional reapportionment. *Harvard Law Review*, 42(8), 1015–1047, doi: 10.2307/1331072.
- Colomer, J.M. (2004). *The handbook of electoral system choice*. London: Palgrave Macmillan.
- Deza, M.M., Deza, E. (2014) *Encyclopedia of distances*. Heidelberg: Springer.
- Dančičin, V. (2013) Hľadanie volebného deliteľa Victorom D'Hondtom. *European Electoral Studies*, 10(1), 63–70.
- D'Hondt, V. (1882). *Système pratique et raisonné de représentation proportionnelle*. Bruxelles: Librairie C. Muquardt, doi: 10.3931/e-rara-39876.
- D'Hondt, V. (1883). Formule du minimum dans la représentation proportionnelle. Moyen facile de trouver le diviseur. *Représentation proportionnelle. Revue mensuelle*, 2, 117–128, 129–130.
- D'Hondt, V. (1885). *Exposé du système pratique de représentation proportionnelle. Adopté par le Comité de l'Association Réformiste Belge*. Gand: Eug. Vanderhaeghen.
- Drton, M., Schwingenschlögl, U. (2005). Asymptotic seat bias formulae. *Metrika*, 62(1), 23–31, doi: 10.1007/s001840400352.
- Equer, M. (1911). Relation entre la méthode d'Hondt et la proportionnalité. *La Grande Revue, Deuxième série*, 31(10 Jan.), 130–137.
- Evcı, U.J., Kaminski, M.M. (2019). *Shot in the foot: unintended political consequences of electoral engineering in the Turkish parliamentary elections in 2018*. ECPR General Conference, Wrocław 2019. <https://ecpr.eu/Filestore/PaperProposal/12fcff16-0906-4f9a-ae48-a3757b3cbc40.pdf>.

- Flis J., Słomczyński W. & Stolicki D. (2019) Seat allocation and seat bias under the Jefferson-D'Hondt System. arXiv: 1805.08291 [physics.soc-ph].
- Gfeller, J. (1890). Du transfert des suffrages et de la répartition des sièges complémentaires. *Représentation proportionnelle. Revue mensuelle*, 9, 120–131.
- Gudgin, G., Taylor, J.P. (1979). *Seats, votes, and the spatial organisation of elections*. London: Pion.
- Hagenbach-Bischoff, E. (1888). *Die Frage der Einführung einer Proportionalvertretung statt des absoluten Mehres*. Basel: H. Georg.
- Hagenbach-Bischoff, E. (1905). *Die Verteilungsrechnung beim Basler Gesetz nach dem Grundsatz der Verhältnisswahl*. Basel: Berichthaus.
- Happacher, M., Pukelsheim, F. (1996). Rounding probabilities: unbiased multipliers. *Statistics & Decisions*, 14(4), 373–382, doi: 10.1524/strm.1996.14.4.373.
- Happacher, M., Pukelsheim, F. (2000). Rounding probabilities: maximum probability and minimum complexity multipliers. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 85 (1–2), 145–158, doi: 10.1016/S0378-3758(99)00077-4.
- Humphreys, J.H. (1911). *Proportional representation: a study in methods of election*. London: Methuen & Co.
- Huntington, E.V. (1921). The mathematical theory of the apportionment of representatives. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 7(4), 123–127.
- Huntington, E.V. (1928). The apportionment of representatives in Congress. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(1), 85–110.
- Huntington, E.V. (1931). Methods of apportionment in Congress. *American Political Science Review*, 25(4), 961–965, doi: 10.2307/1946616.
- James, E.J. (1897). The first apportionment of federal representatives in the United States. *Annals of the American Academy of Political and Social Science*, 9(1), 1–41.
- Janson S. (2014). Asymptotic bias of some election methods. *Annals of Operations Research*, 215(1), 89–136, doi: 10.1007/s10479-012-1141-2.
- Jefferson, T. (1792). Opinion on apportionment bill. W: Oberg, B., Looney, J.J. (2008). *The Papers of Thomas Jefferson*, wersja cyfrowa. Charlottesville: University of Virginia Press.
- Joachim, V. (1917). K otázce poměrného zastoupení. *Správní obzor*, 9(8), 289–298.
- Kaminski, M.M. (2001). Coalitional stability of multi-party systems: evidence from Poland. *American Journal of Political Science*, 45(2), 294–312, doi: 10.2307/2669342.
- Kaminski, M.M. (2002). Do parties benefit from electoral manipulation? Electoral laws and heresthetics in Poland. *Journal of Theoretical Politics*, 14(3), 325–359, doi: 10.1177/095169280201400303.
- Kaminski, M.M. (2018). Spoiler effects in proportional representation systems: evidence from eight Polish parliamentary elections, 1991–2015. *Public Choice*, 176(3–4), 441–460, doi: 10.1007/s11127-018-0565-x.
- Karpov, A. (2015). Alliance incentives under the D'Hondt method. *Mathematical Social Sciences*, 74(C), 1–7, doi: 10.1016/j.mathsocsci.2014.12.001.
- Katz, J.N., King, G. (1999). A statistical model for multiparty electoral data. *American Political Science Review*, 93(1), 15–32, doi: 10.2307/2585758.
- Kollman, K., Hicken, A., Caramani, D., Backer, D., Lublin, D. (2018). *Constituency-Level Elections Archive*. Ann Arbor: Center for Political Studies, University of Michigan. <http://www.electiondataarchive.org>.

- Leutgäb, P., Pukelsheim, F. (2009). List apparentements in local elections – a lottery. W: Holler, M., Nurmi, H. (red.), *Power, voting, and voting power: 30 years after*. Berlin: Springer, 489–500, doi:10.1007/978-3-642-35929-3_7.
- Li, Y., Shugart, M.S. (2016). The seat product model of the effective number of parties: a case for applied political science. *Electoral Studies*, 41, 23–43, doi: 10.1016/j.electstud. 2015.10.011.
- Lijphart, A. (1990). The political consequences of electoral laws, 1945–85. *American Political Science Review*, 84(2), 481–496, doi: 10.2307/1963530.
- Lijphart, A., Gibberd, R.W. (1977). Thresholds and payoffs in list systems of proportional representation. *European Journal of Political Research*, 5(3), 219–244, doi: 10.1111/j.1475-6765.1977.tb01289.x.
- Linzer, D.A. (2012). The relationship between seats and votes in multiparty systems. *Political Analysis*, 20(3), 400–416, doi: 10.1093/pan/mps017.
- Marshall, A.W., Olkin, I., Pukelsheim, F. (2002). A majorization comparison of apportionment methods in proportional representation. *Social Choice and Welfare*, 19(4), 885–900, doi: 10.1007/s003550200164.
- McGhee, E. (2014). Measuring partisan bias in single-member district electoral systems. *Legislative Studies Quarterly*, 39(1), 55–85, doi: 10.1111/lsq.12033.
- McGhee, E. (2017). Measuring efficiency in redistricting. *Election Law Journal*, 16(4), 417–442, doi: 10.1089/elj.2017.0453.
- Mora, X. (2013). La regla de Jefferson-D'Hondt i les seves alternatives. *Materials matemàtics*, 2013(4), 1–34.
- Morse, M., Von Neumann, J., Eisenhart, L.P. (1948). Report to the President of the National Academy of Sciences.
- Palomares, A., Ramírez Gonzáles, V. (2003). Thresholds of the divisor methods. *Numerical Algorithms*, 34(2), 405–415, doi: 10.1023/B:NUMA.0000005353.82970.ce.
- Pavia, J., García-Cárceles, B. (2016). Estimating representatives from election poll proportions: the Spanish case. *Statistica Applicata – Italian Journal of Applied Statistics*, 25(3), 325–340.
- Pólya, G. (1918a). Sur la représentation proportionnelle en matière électorale. *L'Enseignement Mathématique*, 20, 355–379.
- Pólya, G. (1918b). Über die Verteilungssysteme der Proportionalwahl. *Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, 54, 363–387.
- Pólya, G. (1919a). Proportionalwahl und Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 74, 297–322.
- Pólya, G. (1919b). Über die Systeme der Sitzverteilung bei Proportionalwahl. *Wissen und Leben—Schweizerische Halbmonatsschrift*, 12, 259–268, 307–312.
- Poptcheva, E.M. (2016). Understanding the D'Hondt method. Allocation of parliamentary seats and leadership positions. European Parliamentary Research Service Briefing PE 580.901, [http://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2016/580901/EPRS_BRI\(2016\)580_901_EN.pdf](http://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2016/580901/EPRS_BRI(2016)580_901_EN.pdf).
- Pukelsheim, F. (2014). *Proportional representation: apportionment methods and their applications*. Heidelberg: Springer.
- Pukelsheim, F. (2017). *Proportional representation: apportionment methods and their applications*. Wyd. 2. Heidelberg: Springer.

- Rae, D.W. (1967). *The political consequences of electoral laws*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Rae, D.W., Hanby, V.J., Loosemore, J. (1971). Thresholds of representation and thresholds of exclusion. An analytic note on electoral systems. *Comparative Political Studies*, 3(4), 479–488, doi: 10.1177/001041407100300406.
- Rokkan, S. (1968). Elections: electoral systems. W: Sills, D.L. (red.). *International encyclopaedia of the social sciences*. New York: Crowell-Collier-Macmillan, 5, 6–21.
- Sainte-Laguë, A. (1910). La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér.* 3(27), 529–542, doi: 10.24033/asens.627.
- Shugart, M.S., Taagepera, R. (2017a). *Votes from seats: logical models of electoral systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Shugart, M.S., Taagepera, R. (2017b). Electoral system effects on party systems. W: Herron, E., Pekkanen, R., Shugart, M.S. (red.). *Oxford handbook of electoral systems*. New York: Oxford UP, 41–68, doi: 10.1093/oxfordhb/9780190258658.001.0001.
- Schuster, K., Pukelsheim, F., Drton, M., Draper, N.R. (2003). Seat biases of apportionment methods for proportional representation. *Electoral Studies*, 22(4), 651–676, doi: 10.1016/S0261-3794(02)00027-6.
- Stephanopoulos, N.O., McGhee, E.M. (2015). Partisan gerrymandering and the efficiency gap. *University of Chicago Law Review*, 82(2), 831–900.
- Stephanopoulos, N.O., McGhee, E.M. (2018). The measure of a metric: the debate over quantifying partisan gerrymandering. *Stanford Law Review*, 70(5), 1503–1568.
- Szpiro, G.G. (2010). *Numbers rule: the vexing mathematics of democracy, from Plato to the present*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Taagepera, R. (1986). Reformulating the cube law for proportional representation elections. *American Political Science Review*, 80(2), 489–504, doi: 10.2307/1958270.
- Taagepera, R. (2007). *Predicting party sizes: the logic of simple electoral systems*. Oxford: Oxford University Press.
- Taagepera, R., Laakso, M. (1980). Proportionality profiles of West European electoral systems. *European Journal of Political Research*, 8(4), 423–446, doi: 10.1111/j.14756765.1980.tb00582.x.
- Taagepera, R., Shugart, M.S. (1989). *Seats and votes: the effects and determinants of electoral systems*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Tapp, K. (2018). Measuring political gerrymandering. *American Mathematical Monthly*, 126(7), 593–609, doi: 10.1080/00029890.2019.1609324.
- Udina, F., Delicado, P. (2005). Estimating parliamentary composition through electoral polls. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)*, 168(2), 387–399.
- Veomett, E. (2018). The efficiency gap, voter turnout, and the efficiency principle. *Election Law Journal*, 17(4), 249–263, doi: 10.1089/elj.2018.0488.